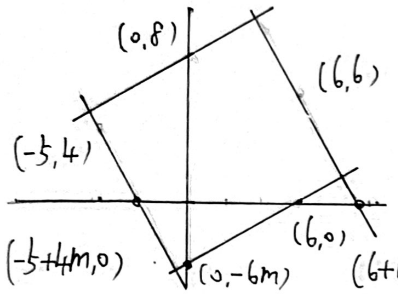
9. 已知坐標平面上有一正方形 $ABCD$，若點 $E(6,0), F(6,6), G(0,8), H(-5,4)$ 分別在

100 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ 上，求正方形 $ABCD$ 的面積為________。



$mx-y+8=0$ $\quad 6m+8=2m+11$

$mx-y-6m=0$ $\quad \Rightarrow m=\frac{3}{4}$

$x+my=(6+6m)$

$x+my=(-5+4m)$ $\Rightarrow \left(\dfrac{\frac{25}{2}}{\frac{5}{4}}\right)^2=100$

10. 已知從 n 階方陣 $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$，$a_{ij}=\begin{cases}2, i<j\\ 0, i=j\\ -1, i>j\end{cases}$ 中隨機取一元素，設隨機變數 X 表示取

5

中的元素數值。若隨機變數 X 的變異數為 1.84，求 n 為________。

$\mu=\frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)\overset{令}{=}t$ $\quad \left(\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot 5\right)$ $\quad 25t^2-125t+46=0$ $\quad \frac{n-1}{2n}=\frac{2}{5}\Rightarrow n=5$

$\frac{46}{25}=5t-t^2$ $\quad$ 5 − 2

5 − 23

$\frac{n-1}{2n}=\frac{23}{5}\Rightarrow n\notin\mathbb{N}$

11. 某實驗測得 20 組樣本點 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_{20},y_{20})$，已知 $\sum_{i=1}^{20}x_i=400, \sum_{i=1}^{20}y_i=900$，

$y=\frac{3}{4}x-157$

利用最小平方法求得 y 對 x 的迴歸直線方程式為 $y=ax+b$。若 $\sum_{i=1}^{20}(y_i-ax_i-b)^2=0$

且 $(x_1,y_1)=(30,40)$，設 $x'=2x-4, y'=-3y+5, i=1,2,\cdots,20$，求數據 (x_i',y_i') 的迴

歸直線方程式為________。

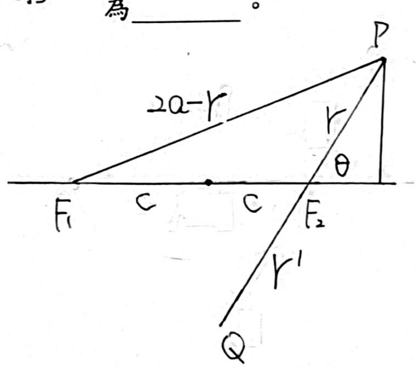
$(20,45)$
$(30,40)$ $\Rightarrow m=\frac{-1}{2}\Rightarrow x+2y=110 \Rightarrow \frac{x'+4}{2}+2\left(\frac{y'-5}{-3}\right)=110 \Rightarrow -3x'+4y'-12-20=-660$

$\Rightarrow y=\frac{3}{4}x-157$

12. 已知橢圓 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{75}=1$ 的中心為 O，且焦弦 $\overline{PQ}$ 與長軸夾角為 $60°$，求 ΔOPQ 面積

$20\sqrt{3}$

為________。



$(2a-r)^2=(2c+r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2$

$\Rightarrow 4b^2=4r(a+c\cos\theta)$

$\Rightarrow \overline{PQ}=r+r_3'=\frac{b^2}{a+c\cos\theta}+\frac{b^2}{a-c\cos\theta}=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}$

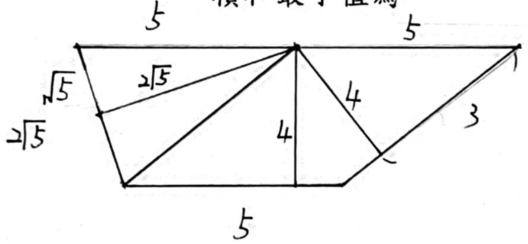
$\Delta=\frac{1}{2}\cdot c\cdot\overline{PQ}\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{2\cdot 10\cdot\cancel{75}^{3}}{\cancel{100-25\cdot\frac{1}{4}}_{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4\cdot 2\cdot 10\cdot 3}{15}=20\sqrt{3}$

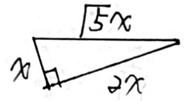
Created with Scanner Pro

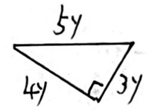
13. 已知梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 平行且 $\overline{AB}=10,\overline{CD}=5,\overline{AD}=2\sqrt{5},\overline{BC}=5$。若 P 為

$\frac{120}{11}$

$\overline{AB}$ 上任一點，作 $\overline{PM}$ 垂直 $\overleftrightarrow{AD}$ 於 M，$\overline{PN}$ 垂直 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 N，求 ΔAPM 與 ΔBPN 的面積和最小值為







$(x+\sqrt{5}y)^2$

$(x^2+6y^2)(1+\frac{5}{6})\geq(2\sqrt{5})^2$

$\sqrt{5}(x+\sqrt{5}y)=\sqrt{5}(2\sqrt{5})$

$\Rightarrow 20\cdot\frac{6}{11}=\frac{120}{11}$

14. 已知空間中兩直線 $L_1:\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{2}$ 與 $L_2:\frac{x-6}{-1}=\frac{y+1}{k}=\frac{z-6}{-2}$，其中 k 值是從

$\frac{3}{4}$

集合 $\{1,2,3,4\}$ 中隨機任取一數，試問在直線 L_1 與 L_2 不重合的條件下，直線 L_1 與 L_2 為相交直線的機率為________。

$L_1 // L_2 : k=2$

$P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{3}{4}$

L_1, L_2 相交於一點 : $k=1,3,4$

15. 已知擲一公正骰子 4 次的點數分別為 a,b,c,d，求滿足 $|(a-b)(b-c)|+(c-d)^2=1$

$\frac{8}{81}$

的機率為________。

c	d
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5

$\begin{cases} c-d=1 \text{ or } -1 \\ a=b \end{cases}$

$5\times2\times6=60$

$\begin{cases} c-d=1 \text{ or } -1 \\ b=c \\ a\neq b \end{cases}$

$10\times1\times5=50$

$\begin{cases} c=d \\ (a-b)(b-c)=1 \text{ or } -1 \end{cases}$

$(2\times2)\cdot4+1+1=18$

$\Rightarrow 128/6^4=8/81$

a	b	c
2	1	2
3 or 1	2	3 or 1
4 or 2	3	4 or 2
⋮	4	⋮
	5	
5	6	5

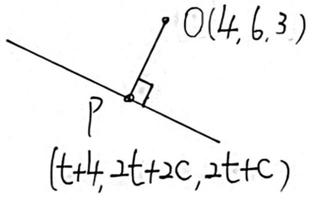
16. 已知空間中，點 $O(a,6,3)$ 與直線 $L:\frac{x-4}{1}=\frac{y-b}{2}=\frac{z-c}{2}$ 皆在平面 $E:2x+y-2z=8$

$(4,-6,-3)$ or $(4,18,9)$

上，且點 O 與直線 L 的距離為 6，求序對 (a,b,c) 為________。

$O\in E\Rightarrow a=4$

$L\in E\Rightarrow b=2c$



$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{L}$

$\Rightarrow (t,2t+2c-6,2t+c-3)\cdot(1,2,2)=0\Rightarrow 9t+6t=18$

$\overrightarrow{OP}=(t,-t,\frac{t}{2})\quad |t|\cdot\frac{3}{2}=6$

$\Rightarrow 3t+2t=6$

$4t+2c=t+6$

$t=4: c=-3, b=-6,\ t=-4: c=9, b=18$

Created with Scanner Pro

17. 已知空間坐標系有三個非零向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$，

$5\sqrt{3}$

若 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 0 & 25 & 0 \\ -6 & 0 & 16 \end{bmatrix}$，求 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 所決定的四面體體積

為_______。

$$\frac{1}{6}\left(25\times\underset{144-36}{108}\right)^{\frac{1}{2}}=5\sqrt{3}$$

18. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{n+3}{n})+(\frac{n+3}{n})^2+\cdots+(\frac{n+3}{n})^{2n}}{n}$ 之值為_______。

$\frac{1}{3}(e^6-1)$

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{(1+\frac{3}{n})((1+\frac{3}{n})^{2n}-1)}{\frac{3}{n}}=\frac{1+\frac{3}{n}}{3}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}\cdot 6}-1\right)\to\frac{1}{3}\left(e^6-1\right)$$

19. 已知高斯符號 $[x]$ 表示不大於實數 x 的最大整數，若 $-2+\sum\limits_{k=1}^{2025}2^{[\sqrt{k}]}=p\cdot 2^{45}$，求實數 p 為__88__

k	1 (1^2)	2	3	4 (2^2)	~ 8	9 (3^2)	~	2024	2025	
$[\sqrt{k}]$	1	1	1	2	2~2	3	~ 44~44		45	
個數	2^2-1^2			3^2-2^2			45^2-44^2			
	$2\times1+1$			$2\times2+1$			$2\times44+1$			

$$S=3\cdot2^1+5\cdot2^2+7\cdot2^3+\cdots+89\cdot2^{44}$$
$$-)\ 2S=\quad 3\cdot2^2+5\cdot2^3+\cdots+87\cdot2^{44}+89\cdot2^{45}$$
$$-S=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{45}-89\cdot2^{45}$$
$$=2(2^{45}-1)-89\cdot2^{45}$$

$$(87\cdot2^{45}+2)+2^{45}-2=88\cdot2^{45}\ \#$$

20. 已知 k 為整數且方程式 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$ 有兩個相異整數根，求 k 值

-2

為_______。

$D>0 \Rightarrow k^2-4k+4>4k^2+12k+20$

$\Rightarrow 3k^2+16k+16<0 \Rightarrow -4<k<-\frac{4}{3}$

$3 \quad + \quad 4$

$1 \quad + \quad 4$

$k=-3$: $x^2+5x+5=0$ 不合

$k=-2$: $x^2+4x+3=0 \Rightarrow x=-1$ or -3 ok

Created with Scanner Pro