臺北市立內湖高級中學

114 學年度第 1 次正式教師甄選數學科初選筆試題目卷

測驗說明： 2025.7.30(三)～8.1(五) Ru

(1) 本試題共 20 題填充題，每題 5 分，共 100 分。

(2) 請將正確答案填入答案卷的題格中，不需計算過程。

(3) 各題答案若非整數，以最簡分數或最簡根式作答。

一、填充題

161 1. 已知 x^{10} 除以 $(x+1)^3$ 的餘式為 $R(x)$，求 $R(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為________。

令 $t=x+1$ $f(t)=(t-1)^{10}=t^3Q(t)+C^{10}_2t^2-C^{10}_1t^1+1$

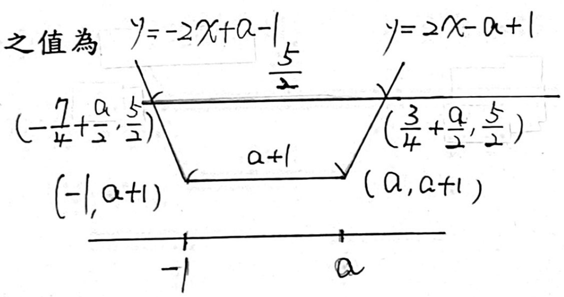
$r(2)=45\cdot4-20+1=161$

$\frac{1}{1000}$ 2. 已知方程式 $\log x^{\log x}+\log x^3-5=0$ 的兩根為 α,β，求 $\alpha\beta$ 之值為________。

$(\log x)^2+3\log x-5=0 \Rightarrow \log\alpha\beta=-3 \Rightarrow \alpha\beta=\frac{1}{1000}$

3. 已知 a 為正實數，若函數 $f(x)=|x-a|+|x+1|$ 的圖形與 $y=\frac{5}{2}$ 所圍的圖形面積

$\frac{1}{2}$ 為 2，求 a 之值為



$\left(\frac{5}{2}+a+1\right)\left(\frac{5}{2}-(a+1)\right)=4$

$\Rightarrow a+1=\frac{3}{2}$ or $-\frac{3}{2}$ (不合)

$\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

4. 設 $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$，若函數 $f(x)=|3\sin x+4\cos x|$ 在 $x=k$ 時有最大值，求 $\sin k-\cos k$

$\frac{1}{5}$ 為________。

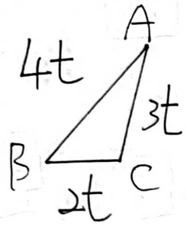
$5\left(\sin x\cdot\underbrace{\frac{3}{5}}_{\cos\phi}+\cos x\cdot\underbrace{\frac{4}{5}}_{\sin\phi}\right)=5\sin(x+\phi)=-5$

$x+\phi=\frac{3}{2}\pi$

$\sin k-\cos k$

$=-\frac{3}{5}-\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{5}$

$\frac{2\sqrt{15}}{5}$ 5. 若三角形 ABC 的三個高分別為 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，求三角形 ABC 的周長為________。



$\cos C=\frac{-3}{2\cdot2\cdot3}=\frac{-1}{4}$

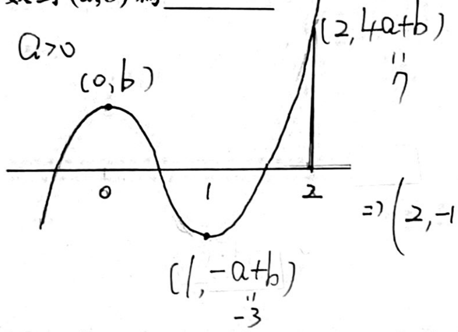
$\Delta=\frac{1}{2}\cdot2t\cdot3t\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{1}{2}\cdot2t\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow 9t=\frac{2}{3\sqrt{15}}\cdot9=\frac{2\sqrt{15}}{5}$

$(2,-1)$ or $(-2,5)$ 6. 已知 a,b 為實數，若函數 $f(x)=2ax^3-3ax^2+b$ 在 $0\le x\le2$ 時有最大值 7，最小值 -3，求數對 (a,b) 為________。

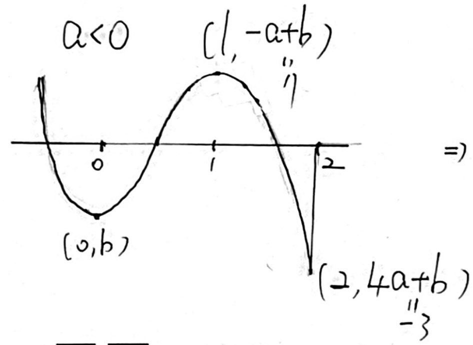
$f'(x)=0$

$\Rightarrow x(x-1)=0$

$\Rightarrow x=0$ or 1

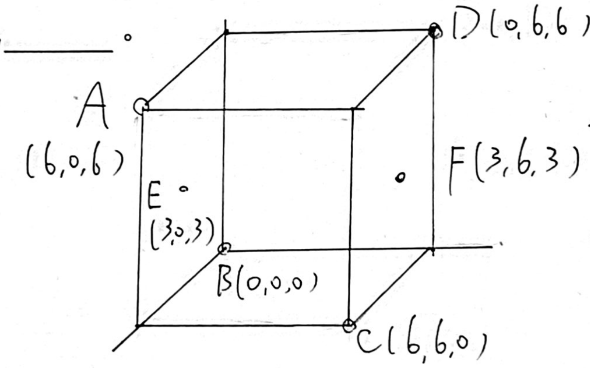


$\Rightarrow (2,-1)$



$\Rightarrow (-2,5)$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 7. 在空間中，正四面體 $ABCD$ 的稜長為 1，若 $\overline{AB},\overline{CD}$ 的中點分別為 E,F，且 G 為 ΔAEF 重心，求 $\overline{BG}$ 長度為________。

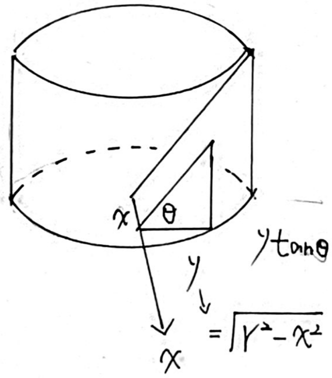


$\Rightarrow G(4,2,4)$

$\Rightarrow 2\cdot3\cdot\frac{1}{6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

8. 已知一個底面半徑為 3，高也為 3 的直圓柱，平面 E 通過底面的直徑 $\overline{AB}$，且平面 E 與底面的夾角為 45°，此時平面 E 將直圓柱切割成兩部分，求較小那部分的體積為________。

18



$\Delta=\frac{1}{2}y^2\tan\theta$

$2\int_0^r\frac{1}{2}(r^2-x^2)\tan\theta\,dx=\frac{2}{3}r^3\tan\theta$

$\Rightarrow \frac{2}{3}\cdot27=18$