2025.7.27(日) ~ 7.29(二) Ru

臺北市立景美女子高級中學 114 學年度第 1 次正式教師甄選 數學科 初試題目卷

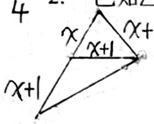
一、填充題：84 分(每格 6 分)

4 1. 已知兩質數 p、q 滿足 $10^n < p < q < 10^{n+1}$，又 $pq^2 = 1394542162859$，則正整數 n 的值為＿＿＿＿＿＿。

[1] $3n < \log pq^2 = 12.\cdots < 3(n+1) \Rightarrow n < 4.\cdots < n+1 \Rightarrow n = 4$

$\frac{15\sqrt{7}}{4}$ 2. 已知△ABC 的三邊長為連續三個正整數，且最大角是最小角的 2 倍，則△ABC 的面積為＿＿＿＿＿＿。

[2]



$\frac{2x+1}{x+2} = \frac{x+2}{x} \Rightarrow x^2-3x-4=0 \Rightarrow 4, 5, 6$

$\cos\theta = \frac{5}{2\cdot4\cdot5}$ 　 $8, 1, 3\sqrt{7}$ 　 $\Delta = \frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$

30 3. 空間中，設△ABC 的三邊長 $\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=5$、$\overline{BC}=7$，另有一點 P 滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=\frac{25\sqrt{3}}{3}$，則錐體 $P-ABC$ 的體積為＿＿＿＿＿＿。

[3] 外心 　 $\cos\theta = \frac{-15}{2\cdot3\cdot5} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 120°$ 　 $2R = 2(\frac{7}{\sqrt{3}})$

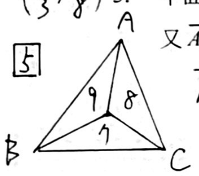
$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{24}{\sqrt{3}} = 30$

$2\sqrt{3}-2$ 4. 試求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\frac{1}{\sqrt{n+3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{3n}}\right)=$＿＿＿＿＿＿。

[4] $\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} \Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$ 　 令 $u=x+1$，$du=dx$ $\Rightarrow \int_1^3 u^{-\frac{1}{2}}du = 2u^{\frac{1}{2}}\Big|_1^3 = 2\sqrt{3}-2$

$(\frac{1}{3}, \frac{3}{8})$ 5. 平面上，設點 P 是△ABC 內部一點，且直線 AP 交 $\overline{BC}$ 於 D，已知△BPC、△CPA、△APB 之面積比為 7: 8: 9，又 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對 $(x,y)=$＿＿＿＿＿＿。

[5]



$\overrightarrow{AP} = x(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}) + y(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PC}) \Rightarrow \underbrace{(1-x-y)}_{7t}\overrightarrow{PA} + \underbrace{x}_{8t}\overrightarrow{PB} + \underbrace{y}_{9t}\overrightarrow{PC} = \vec{0}$

$1-17t = 7t$

$x = 8\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{3}$

$y = 9\cdot\frac{1}{24} = \frac{3}{8}$

$\frac{200}{101}$ 6. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足遞迴關係式 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{n}{n+2}a_n, & n\text{是正整數} \end{cases}$，則 $\sum_{n=1}^{100} a_n =$＿＿＿＿＿＿

[6] $a_n = \frac{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}{3\cdots(n-1)\cdot n\cdot(n+1)} = 2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) \Rightarrow 2(\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{100}-(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{101})) = \frac{200}{101}$

$\frac{4}{3}$ 7. 設 f 為實數系上的連續函數，若 $\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = x^2+1$，則 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx =$＿＿＿＿＿＿

[7] $\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x) \Rightarrow f(x)+f(-x) = x^2+1$

$\int_{-1}^{1} f(-x)dx \overset{u=-x}{=\!=} \int_1^{-1} f(u)(-du) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(-x)dx = \frac{2}{3}+2$ 　 $\frac{4}{3}$ #

288 8. 用面積為 1 的小正方形湊成一個邊長為 n 的大正方形，若用同樣數量的小正方形可以拼湊成 28 種長方形（長、寬互換視為同一種），則 n 的最小值為＿＿＿＿＿＿。

[8] 2×1、1×2 同一種 　 若 $n=6$，$n^2 = 1\times36 = 2\times18 = 3\times12 = 4\times9 = 6\times6 \Rightarrow 5$ 種

$n^2 = 2^2\cdot3^2 \rightarrow$ 正因數個數：$\square = 9$ 　 $\frac{\square+1}{2} = 5$

$28 = \frac{\square+1}{2} \Rightarrow \square = 55 = (10+1)(4+1) \Rightarrow n^2 = 2^{10}\cdot3^4 \Rightarrow n = 2^5\cdot3^2 = 288$

$\frac{8}{29}$ 9. 設甲袋中有 5 顆白球、2 顆黑球，乙袋中有 3 顆白球，先自甲袋中任取 4 顆球放入乙袋，再從乙袋中任取 5 顆球放入甲袋，完成這樣的動作稱為一局。已知每顆球抽到的機會均等，第一局結束時，在甲袋中有黑球的條件下，過程中從甲袋取得 2 顆白球、2 顆黑球放入乙袋的機率為＿＿＿＿＿＿。

[9] 甲 5W 2B 　 乙 3W

$$\frac{\frac{C^5_2C^2_2}{C^7_4}\left(1-\frac{C^5_5}{C^7_5}\right)}{\frac{C^5_4}{C^7_4}+\frac{C^5_3C^2_1}{C^7_4}+\frac{C^5_2C^2_2}{C^7_4}\left(1-\frac{C^5_5}{C^7_5}\right)} = \frac{\frac{2}{7}\cdot\frac{20}{21}}{\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{20}{21}} = \frac{40}{145} = \frac{8}{29}$$