

2025.7.22(二) ~ 7.25(五) Ru

## 第一部分：填充題 (每題 5 分，共 70 分)

1. 在某場比賽中，五位評審各給出一個介於 1 到 10 之間的整數分數，並計算這五位評審所給出分數的算術平均數、中位數和眾數。已知五個分數的算術平均數為 7、中位數為 8 且眾數為 9，請找出所有可能的分數組合。

A: {2, 7, 8, 9, 9} 或 {3, 6, 8, 9, 9} 或 {4, 5, 8, 9, 9}

2. 試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{(n+4)^2} + \frac{n}{(n+8)^2} + \dots + \frac{n}{(n+4n)^2} \right) = ?$

A:  $\frac{1}{5}$   $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(1+4\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{(4x+1)^2} dx$

$\frac{1}{4} u = 4x+1, du = 4dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} \frac{1}{u^2} du = \left. -\frac{1}{u} \right|_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} = \frac{1}{5}$

3. 平面  $E$  通過  $(2, -2, -1)$  及  $(4, -4, -3)$ 。若  $P(a, b, c)$  在平面  $E$  上的投影點為  $Q(1, 4, 0)$ ，且  $\overline{PQ} = 6\sqrt{2}$ ，求  $P$  的坐標？

A:  $(7, 4, 6), (-5, 4, -6)$   $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 6 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t^2 = 2 \cdot 36 \\ \Rightarrow t = \pm 6 \end{pmatrix}$

$\vec{n} // (1, 0, 1)$  令  $P(t+1, 4, t) \Rightarrow P(7, 4, 6) \text{ or } (-5, 4, -6)$

4. 已知  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 、 $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2\}$ ，其中  $a_i \in \mathbb{N}$ ， $(i=1, 2, 3, 4, 5)$ 。設

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$  且  $A \cap B = \{a_1, a_4\}$ ，若  $a_1 + a_4 = 10$ ，且  $A \cup B$  元素之和為 224，求集合  $A = ?$

A: {1, 3, 4, 9, 10}

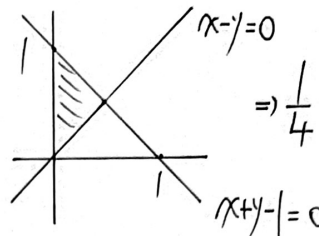
5. 85 藍歡慶營業一周年，凡買飲料超過百元者，皆贈送一張刮刮樂彩券。右圖為其中一種形式，此彩券共有 9 格，內有四個 1、三個 2、二個 3，玩法是從中任刮 2 格兌獎，否則作廢。若所刮 2 格的數字相同，則可得到此數字 72 倍之等價折價券；若所刮 2 格的數字相異，則只能領紀念品一份。今小胖拿到一張刮刮樂彩券，試問小胖刮得折價券金額之期望值？

1 <sup>+</sup>	2 <sup>+</sup>	1 <sup>+</sup>
1 <sup>+</sup>	3 <sup>+</sup>	1 <sup>+</sup>
2 <sup>+</sup>	2 <sup>+</sup>	3 <sup>+</sup>

A: 30 元  $\begin{matrix} 1111 \\ 222 \\ 33 \end{matrix} n(S) = C_2^9 = 36$   $\frac{72}{36} (1 \times C_2^4 + 2 \times C_2^3 + 3 \times C_2^2) = 30$

6. 求平面上滿足  $x^3y^2 - x^2y^2 - xy^4 + xy^3 \geq 0$  且  $0 \leq x \leq y$  的區域面積？

$A : \frac{1}{4}$   
 $xy^2(x^2 - x - y^2 + y) \geq 0$   
 $\Rightarrow xy^2(x-y)(x+y-1) \geq 0$   
 $\begin{matrix} + & - & - \end{matrix}$

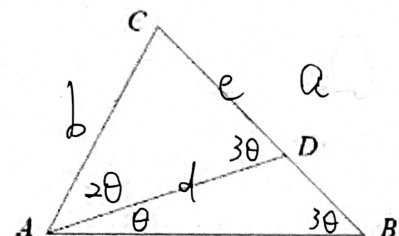
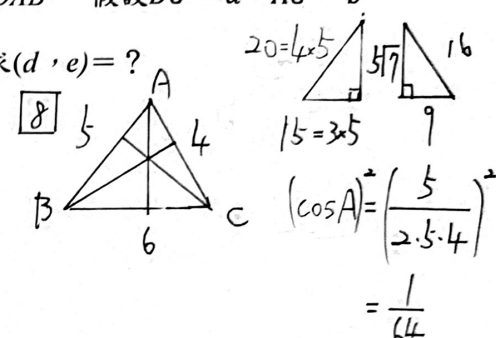


$x-y=0$   
 $x+y-1=0$   
 $\Rightarrow \frac{1}{4}$

7. 如圖，  $2\angle BAC = 3\angle ABC$ ，且  $D$  在  $\overline{BC}$  上，使得  $\angle DAC = 2\angle DAB$ 。假設  $\overline{BC} = a$ ， $\overline{AC} = b$ ，

$\overline{AB} = c$ ， $\overline{AD} = d$  且  $\overline{CD} = e$ 。請用  $a$ 、 $b$  和  $c$  表示  $d$  和  $e$ 。求  $(d, e) = ?$

$\frac{d}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow d = \frac{bc}{a}$   
 $\frac{e}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow e = \frac{b^2}{a}$

$(\cos A)^2 = \left(\frac{5}{2 \cdot 5 \cdot 4}\right)^2 = \frac{1}{64}$

$A : \left(\frac{bc}{a}, \frac{b^2}{a}\right)$

8.  $H$  為  $\triangle ABC$  的垂心， $\cos B = \frac{3}{4}$ ， $\cos C = \frac{9}{16}$ 。若  $\overline{BH}$  交  $\overline{AC}$  於  $E$ ，且  $\overline{CH}$  交  $\overline{AB}$  於  $F$ 。求  $\frac{\triangle AEF \text{ 面積}}{\triangle ABC \text{ 面積}} = ?$

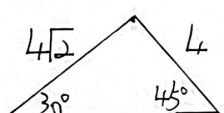
$A : \frac{1}{64}$   
 $\Rightarrow - (3a^2 + 1)x + \sqrt{3}a = \sqrt{3}(a-1) / (3a+1) \Rightarrow x = \sqrt{3}(3a^2 + 1) / (3a^2 + 1)(3a+1) = \sqrt{3} / (3a+1)$

9. 設複數  $Z_1 = -1 + \sqrt{3}ai$ ， $Z_2 = \frac{\sqrt{3}(a-1)}{3a+1} + i$ ，其中  $a \in \mathbb{R}$  且  $a \neq -\frac{1}{3}$ 。設複數  $Z_3 = \frac{Z_2}{Z_1}$ ，求  $\text{Arg}(Z_3) = ?$

$Z_3 = \frac{2}{3a+1} e^{i(\frac{11\pi}{6})} \Rightarrow a > -\frac{1}{3} : \frac{11}{6}\pi$   
 $a < -\frac{1}{3} : \frac{5}{6}\pi$

10. A triangle with interior angles  $30^\circ$  and  $45^\circ$ , and the radius of the circumcircle is 4. What is the area of the triangle?

$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 4\sqrt{3} + 4$



$A : 4 + 4\sqrt{3}$

11. George throws three unbiased dice and removes all of the dice that come up with a 5 or 6. Martha then throws the dice that remain, if any. Determine the probability that exactly one of Martha's dice shows a 5 or 6.

$A : \frac{98}{243}$   
 $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A') = \frac{2}{3}$   
 $C_2^3 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$   
 $C_1^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$   
 $C_0^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{8}{27}$