$\frac{1}{3}$ **14.** 已知數列$\langle a_n\rangle$滿足前n項和$S_n=n^2+4n+3$。以符號μ_n表示前n項的算數平均數、

$a_k=2k+3$ 　σ_n表示前n項的標準差，試求：$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n^{\,2}}{\mu_n^{\,2}}$之值________。

$\mu_n=\frac{1}{n}\left(2\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)+3=n+4$ 　$\sigma_n^2=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(2k+3)^2\right)-(n+4)^2=\frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot4+12\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)-(n+4)^2$

$\frac{41}{88}$ **15.** 設等差數列$\langle a_n\rangle$的前n項和為T_n，等差數列$\langle b_n\rangle$的前n項和為S_n。 $\Rightarrow \frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$

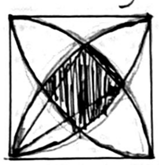
$T_k=\left(a_1+(k-1)\frac{d_1}{2}\right)k$

對任意正整數n，$\frac{\sum_{k=1}^{n}T_k}{\sum_{k=1}^{n}S_k}=\frac{2n+3}{3n+4}$恆成立，則$\frac{a_7}{b_{10}}=$________。

$\sum_{k=1}^{n}T_k=\frac{n(n+1)}{2}a_1+\frac{d_1}{2}\cdot\boxed{\frac{(n+1)\cdot n(n-1)}{3}}$ $\Rightarrow \frac{3a_1+(n-1)d_1}{3b_1+(n-1)d_2}=\frac{2n+3}{3n+4}\Rightarrow d_1=2,\ a_1=\frac{5}{3}$, $d_2=3,\ b_1=\frac{7}{3}$ $\Rightarrow \frac{5+3\cdot2\cdot6}{7+3\cdot3\cdot9}=\frac{41}{88}$

$\left(\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\left(\frac{k+1-(k-2)}{3}\right)\right)$

$5-2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ **16.** 在邊長為r的正方形$ABCD$之內部任取一點P，則$(\overline{PA}-r)(\overline{PB}-r)(\overline{PC}-r)(\overline{PD}-r)\geq0$



的機率為

$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot2\right)4+4\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+1+1-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5-2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

二、計算題：(共 20 分，配分列於每小題之後，須詳列計算過程或說明理由)

1. 試證：橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的面積為$\pi ab$，其中$a>0$，$b>0$。(6 分)

法：$2\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=\frac{2b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ 　令$y=\sqrt{a^2-x^2}\Rightarrow x^2+y^2=a^2\Rightarrow\frac{2b}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{2}=\pi ab$

法2：$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{b}{a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$\Gamma':\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1$

$A'=\frac{b}{a}A=\frac{b}{a}\pi a^2=\pi ab$

$\frac{13}{4}$ **2.** 已知實數x滿足$[x^2]-[x]^2=\frac{17}{4}-x$，其中$[x]$表示不大於$x$的最大整數，試求：$x$的所有解。(7 分)

令$x=n+b$, $n\in\mathbb{Z}$, $b=\frac{1}{4}$

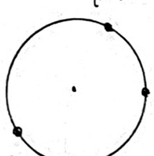
$4+\frac{1}{4}-(n+b)\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=n+\frac{1}{4}$

$\Rightarrow 4-n=\left[n^2+\frac{n}{2}+\frac{1}{16}\right]-n^2=\left[\frac{8n+1}{16}\right]$

$\Rightarrow \frac{8n+1}{16}-1\leq4-n<\frac{8n+1}{16}\Rightarrow\frac{63}{24}=\frac{21}{8}<n\leq\frac{79}{24}\Rightarrow n=3,\ x=3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$

3. 單位圓上有三點A、B、C，$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=8$，證明：$\Delta ABC$為直角三角形。(7 分)

$B(\cos\alpha,\sin\alpha)$



$A(1,0)$

$C(\cos\beta,\sin\beta)$

$\left(\begin{aligned}&(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha\\+&(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\\+&(\cos\beta-1)^2+\sin^2\beta\end{aligned}\right)=6-2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos(\alpha-\beta))=6-2\cdot(-1)$

$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+2\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-1=-1$

$\Rightarrow\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=0$

$\alpha-\beta=\pi$ or $\alpha=\pi$ or $\beta=\pi$