2025.7/16(三)~7/21(一) Ru

臺中市立文華高級中等學校114學年度第1次教師甄選
數學科專業知能試題本

1

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 1-3+1 \,)\, 1-4-6+4 \\ 1-3+1 \\ \hline -1-7+4 \\ -1+3\ -1 \\ \hline -10+5 \end{array}$$

測驗說明：

一、本測驗分成二大題：填充題(80分)及計算題(20分)。

二、填充題作答說明：請將正確答案填入正確的題格中，分式須化至最簡，根式須有理化，否則不予計分，全對才給分，不需計算過程。

三、計算題作答說明：請自行標清楚題號再作答，須詳列計算過程或說明理由。

四、另附一張A3計算紙，可供計算或打草稿，請勿用答案卷正反面打草稿。計算紙上方請書寫准考證號碼，並於考試完畢隨試題收回。

一、填充題：(共80分)

I.填充一(每格4分，共32分，每格全對才給分。)

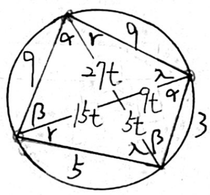
$\frac{3+3\sqrt5}{2}$ 1. 已知a為正無理數，a^3-4a^2-6a+4與a^2-3a+1皆為有理數，則$a=$______。

$\square=\triangle(a-1)-10a+5=(\triangle-10)a-\triangle+5 \Rightarrow a^2-3a+1-10=0 \Rightarrow a=\frac{3+3\sqrt5}{2}$

$(-\square-\triangle+5)+(\triangle-10)a=0$

$\mathbb{Q}\quad \mathbb{Q}\quad \mathbb{Q}'$

$(\frac{12}{5},4)$ 2. 有一圓內接四邊形$ABCD$，$\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CD}=3$，$\overline{AD}=9$，若$\overrightarrow{CA}=x\overrightarrow{CB}+y\overrightarrow{CD}$，則數對$(x,y)=$



$\frac{32}{5}\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)=\left(\frac{12}{5},4\right)$

$-22x+69$ 3. 已知四次整係數多項式$f(x)$滿足首項係數為1且$f(2-\sqrt3)=f(1+\sqrt5)=7$，則$f(x)$除以$x^2-6$的餘式為

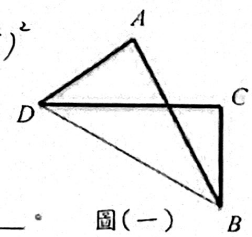
$f(x)=(x-(2-\sqrt3))(x-(2+\sqrt3))(x-(1+\sqrt5))(x-(1-\sqrt5))+7$
$=(x-\sqrt6)(x+\sqrt6)Q(x)+Ax+B$

$f(\sqrt6)=((\sqrt6-2)^2-3)((\sqrt6-1)^2-5)+7=(7-4\sqrt6)(2-2\sqrt6)+7=-22\sqrt6+69$

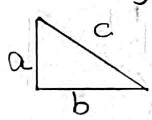
5 4. 求$5^{(\log2)^3}\times8^{(\log5)^2}\times5^{(\log5)^3}=$______。

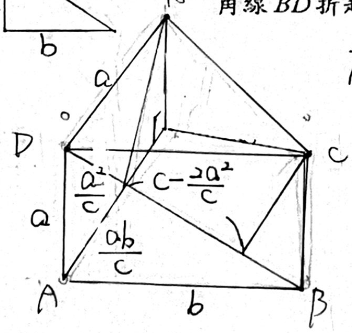
$\log A=((\log2)^3+(\log5)^3)\log5+3(\log5)^2\log2=(1-3(\log2)(\log5))\log5+3(\log2)(\log5)^2$
$=\log5 \Rightarrow A=5$

$\frac{3}{5}$ 5. 有一長方形$ABCD$，$\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=5$，如圖(一)，將長方形沿對角線$\overline{BD}$折起，使得$\triangle ABD$與$\triangle BCD$夾$60°$，則$\cos(\angle ADC)=$______。



圖(一)





$\overline{AC}^2=(c-\frac{2a^2}{c})^2+\left((\frac12)^2+(\frac{\sqrt3}{2})^2\right)(\frac{ab}{c})^2=a^2+b^2-4a^2+\frac{a^2(a^2+b^2+3a^2)}{c^2}$

$=b^2-2a^2+\frac{3a^4}{a^2+b^2}$

$=\frac{a^4+b^4-a^2b^2}{a^2+b^2}$

$=a^2+b^2-\frac{3a^2b^2}{a^2+b^2}$

$\cos\theta=\frac32\cdot\frac{ab}{a^2+b^2}$

$=\frac32\cdot\frac25=\frac35$ ←

$\frac{1}{4}$ 6. 已知有一袋子裝有「兩顆紅球、三顆黑球、四顆白球」，今從袋中取球並記錄顏色。假設每顆球被取到的機會相同，且每次只取一球，取後不放回，直到紅球全數取出為止，則在紅球沒有被連續取出的條件下，紅球是三種顏色中最後被取完的機率為________。

$\frac{C^7_1}{C^8_2}=\frac{1}{4}$

$10x+9y=-14$ 7. 雙曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$ 有一弦以 $(-5,4)$ 為中點，則此弦的方程式為________________。

設 $A(a,b)$, $B(c,d)$ $\quad \frac{a^2}{9}-\frac{(b-2)^2}{4}=1$, $\frac{c^2}{9}-\frac{(d-2)^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{(a-c)(-10)}{9}-\frac{(b-d)}{4}\cdot(8-4)=0$

$\Rightarrow m=\frac{-10}{9}\Rightarrow 10x+9y=14$

$42-4\sqrt{10}$ 8. 已知複數 z 滿足 $|z|=1$，則 $|z-6|^2+|z+2i|^2$ 之最小值為________。

$(0,-2)$. (c,s) $(6,0)$ $\quad c^2+(s+2)^2+(c-6)^2+s^2=42+4s-12c$

$\geq 42-4\sqrt{10}$

II.填充二(每格6分，共48分，每格全對才給分)

-6 9. 設實係數多項式函數 $f(x)=x^4+ax^2+bx$ 與 $g(x)=cx+(a-3)$ 的圖形相切於兩相異點，則實數 $a=$

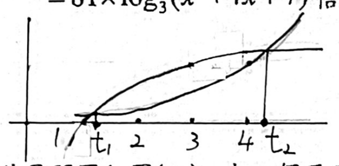
設 $x^4+ax^2+(b-c)x-(a-3)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

$\alpha,\alpha,\beta,\beta$ $\quad \alpha+\beta=0$, $\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta$ $\quad \Rightarrow -(a-3)=2\alpha^2+3=\alpha^4$

$=2\alpha\beta=-2\alpha^2=a$ $\quad \Rightarrow \alpha^4-2\alpha^2-3=0 \Rightarrow a=-2\cdot3=-6$

-4 10. 已知方程式 $3^{(x^2+4x+7)}=81\times\log_3(x^2+4x+7)$ 恰有兩實根 α、β，則 $\alpha+\beta$ 之值為

令 $t=x^2+4x+7$ $\quad \begin{cases} y=3^{t-4} \\ y=\log_3 t \end{cases}$



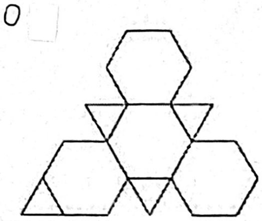
$x^2+4x+7=t_1$, $D<0$

$x^2+4x+7=t_2$, $D>0$

$\Rightarrow \alpha+\beta=-4$

$\frac{46\sqrt{2}}{3}$ 11. 有一「八面體」，其展開圖如圖(二)，由四個正三角形及四個正六邊形組成。已知各邊邊長為2單位長，則此八面體的體積為________。

$\frac{\sqrt{2}}{12}(6^3-2^3\times4)=\frac{46}{3}\sqrt{2}$



圖(二)

66 12. 設 $f(x)=3x^{20}+192x^8+3$，$g(x)=x^3-3x^2+4x-2$，$f(x)=0$ 的二十個複數根為 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{20}$，則 $g(\alpha_1)\times g(\alpha_2)\times\cdots\times g(\alpha_{20})=$________。

$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & +4 & -2 & 1 \\ & +1 & -2 & +2 & \\ \hline 1 & -2 & +2 & +0 & \end{array}$

$g(x)=(x-1)(x-(1+i))(x-(1-i)) \Rightarrow \frac{1}{3}f(1)\cdot\frac{1}{3}f(1+i)\cdot\frac{1}{3}f(1-i)=66\cdot\frac{3}{3}\left(2^{10}e^{i\frac{20}{4}\pi}+64\cdot2^4e^{i(2\pi)}+1\right)\cdot\frac{3}{3}\left(2^{10}\cdot e^{\left(-\frac{20}{4}\pi\right)}+64\cdot2^4\cdot1+1\right)=66$

$1+i=\sqrt{2}e^{i(\pi/4)}$, $1-i=\sqrt{2}e^{(-\pi/4)}$

$m<4+\sqrt{15}$ 13. 若 $a<b$，已知對任意實數 x，$ax^2+bx+c\geq0$ 恆成立，且 $m<\frac{4a+3b+2c}{b-a}$ 恆成立，則實數 m 之範圍為________。

$\begin{cases} \frac{a}{b}<1 \\ b^2\leq4ac \end{cases}$ $\quad \frac{4(\frac{a}{b})+3+2(\frac{c}{b})}{1-\frac{a}{b}}\geq\frac{4(\frac{a}{b})+3+\frac{1}{2}(\frac{b}{a})}{1-\frac{a}{b}}$ 令 $t=\frac{a}{b}$ $\frac{4t+3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}}{1-t}=\frac{1}{2}\left(\frac{8t^2+6t+1}{t-t^2}\right)$ 令 $=k$

$\Rightarrow \begin{cases} 4(\frac{c}{b})\geq(\frac{b}{a}) \\ 1-\frac{a}{b}>0 \end{cases}$ $\quad (k+8)t^2+(6-k)t+1=0$

$t\in\mathbb{R}$, $D\geq0 \Rightarrow k^2-16k+4\geq0 \Rightarrow k\geq8+2\sqrt{15}$ or $k\leq8-2\sqrt{15}$ $\Rightarrow 4+\sqrt{15}$

7/18 (五) 佛大會館