國立彰化高級中學 112 學年度 校內學科能力競賽試題（數學）

年　班　座號：　　姓名：

說明：前 10 題為填充題，寫答即可，每題 6 分；後 5 題為計算證明題，每題 8 分，要過程，否則扣分。

1. 今有甲、乙、丙三門大砲，每砲各發射 100 發砲彈，甲砲每一分鐘發射一發，乙砲每兩分鐘發射一發，丙砲每三分鐘發射一發。三砲同時發射第一發砲彈，其中沒有一顆啞彈，問從開始發射到三砲全部發射完畢，總共可以聽到幾響砲聲？

答：＿＿＿＿＿

2. 已知線型函數 $f(x)=ax+b$，其中 a、b 均為整數，且滿足 $7<f(3)<11$、$12<f(8)<19$，求序對 (a,b)。

答：＿＿＿＿＿

3. 已知 $\triangle ABC$ 中，$A(3,1)$，而 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 邊上中線所在直線的方程式分別為 $2x-y-1=0$ 和 $x=1$，求直線 $\overline{BC}$ 的方程式

答：＿＿＿＿＿

4. 設 $a,b,c\in R$，已知 $\begin{cases}a+b+c=3\\ab+bc+ca=-9\end{cases}$，求 a 的最大值與最小值。

答：＿＿＿＿＿

5. 設 $x,y,z>0$ 且滿足 $4x^2+2xy+\dfrac{y^2}{3}=25$、$\dfrac{y^2}{3}+z^2=9$、$4x^2+2xz+z^2=16$，求 $xy+yz+3xz=?$

答：＿＿＿＿＿

6. 已知空間座標中兩點 $A(10,3,4)$、$B(4,5,3)$，若 P、Q 分別為 x 軸與 y 軸上之動點，求 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 之最小值。

答：＿＿＿＿＿

7. 「拈」是一種古老的遊戲，規則是兩人依序輪流取走袋子內的棋子，每次隨機取走約定的 1 顆或數顆棋子，最後取光剩餘棋子者為勝。
今甲乙兩人依甲、乙、甲、乙、... 的次序輪流取走袋子內的 14 顆棋子，每次隨機取走 1 或 2 顆棋子，直到棋子被取光為止。已知最後由甲取光剩餘的棋子，則兩人取走棋子的可能情形共有幾種？

答：＿＿＿＿＿

8. 已知集合 $\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ 中的元素是由方程式 $2x^6+4x^5+6x^4+10x^3+18x^2+13x+21=0$ 的六個根隨機排列而成，若 $Y=x_1+x_2x_3+x_4x_5x_6$，求 Y 的期望值。

答：＿＿＿＿＿

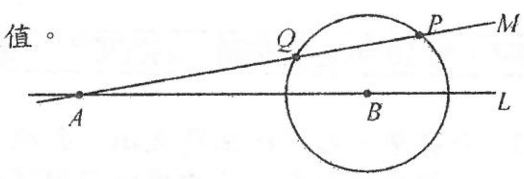
9. 以 O 為原點之空間坐標中，已知 $\overrightarrow{OP}=(3\sin\alpha+\cos\beta,\sin\alpha+3\cos\beta,2\sin\alpha+2\cos\beta)$，其中 $0\le\alpha\le30^\circ$，$0\le\beta\le60^\circ$。求所有 P 點所形成的區域面積。

答：＿＿＿＿＿

10. 在第一象限中，直線 $y=4x$ 落在曲線 $y=10\pi\sin^2 x$ 下方的所有線段長度之和為何？

答：＿＿＿＿＿

11.如圖，已知 A、B 為直線 L 上兩點且 $\overline{AB}=20$，以 B 為圓心，6 為半徑作一圓，
若直線 M 通過 A 點且交圓於 P、Q 兩點，求 P、Q 兩點到直線 L 的距離差的最大值。



解：

12.已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle A, \angle B, \angle C$ 之對邊長分別為 a, b, c，若 $\angle A = 43°$ 且 $b^2 = a(a+c)$，求 $\angle C = ?$

解：

13.求 $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}}$ 的整數部分。

解：

14.化簡 (1) $\sum_{k=1}^{n} k^2 C_k^n = ?$ (2) $\sum_{k=1}^{n} k(C_k^n)^2 = ?$

解：

15.設 O 為正 n 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 之中心，試證明：$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0}$

證明：