114 中正高中　2025.7.9(三)～7.15(三) Ru

1. 已知空中有一邊長為$5\sqrt{2}$的正四面體，A為此四面體中距離地面的最近的頂點，而其他三個頂點距離地面距離分別為5、6、7，則A到地面的距離為 $6-\frac{2\sqrt{69}}{3}$

法：設 $E: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$a,b,c>0$

A(5,5,5)　B(5,0,0)　C(0,5,0)　D(0,0,5)

$t=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$

$1-\frac{5}{a}=5t$，$1-\frac{5}{b}=6t$，$1-\frac{5}{c}=7t$

$\Rightarrow \begin{cases} 3-10(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=85t^2 \\ 6-10(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=36t \end{cases}$

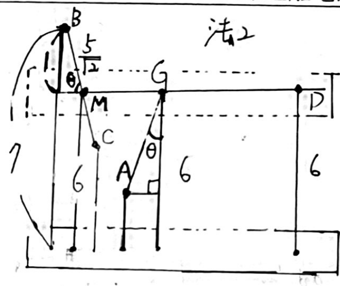
$\Rightarrow 85t^2-36t+3=0$

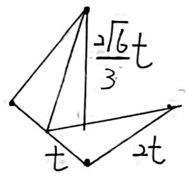
$\Rightarrow 3(\frac{1}{t})^2-36(\frac{1}{t})+85=0$

$\Rightarrow \frac{1}{t}=6\pm\frac{\sqrt{69}}{3}$

$\frac{1-5(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}{t}=\frac{18t-2}{t}=18-2(\frac{1}{t})=6-\frac{2\sqrt{39}}{3}$ or $6+\frac{2\sqrt{39}}{3}$ (不合)

法2





$6-\overline{GA}\cos\theta$

$=6-\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{23}}{5}=6-\frac{2\sqrt{69}}{3}$

2. 計算$\prod_{k=2}^{31}\frac{\log_k(7^{k^2})}{\log_{k+1}(7^{k^2-1})}$的值為 $\frac{155}{16}$

$\prod_{k=2}^{31}\frac{k^2}{k^2-1}\cdot\frac{\log(k+1)}{\log k}=\frac{2^2\cdot3^2\cdots31^2}{1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot5\cdots28\cdot30\cdot29\cdot31\cdot30\cdot32}\cdot\frac{\log 32}{\log 2}$

$=\frac{2\cdot31\cdot5}{32}=\frac{155}{16}$

3. 有一地球儀為半徑4公分的球體，其球心為O。若地球儀表面上有A、B兩點，其中點A位於東經60度北緯45度、點B位於西經30度南緯45度，則沿著地球儀表面從點A走到點B的最短距離為 $\frac{8\pi}{3}$ 公分。

$A(4\cos45^\circ\cos60^\circ, 4\cos45^\circ\sin60^\circ, 4\sin45^\circ)$，$B(4\cos45^\circ\cos(-30^\circ), 4\cos45^\circ\sin(-30^\circ), -4\cos45^\circ)$

$\Rightarrow A(\sqrt{2},\sqrt{3},2\sqrt{2})$，$B(\sqrt{3},-\sqrt{2},-2\sqrt{2})$　$\cos\theta=\frac{-8}{4\cdot4}=-\frac{1}{2}$　$\Rightarrow 4\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{8}{3}\pi$

4. 某人自製一粒六面體骰子並聲稱此骰子出現奇數與偶數的比例相等。今檢定此骰子出現的比例，並列出前三個步驟如下：

① 假設「此骰子出現奇數與偶數的比例相等」；
② 確立檢定統計量為「此骰子擲7次而出現奇數的次數」；
③ 設定顯著水準為0.05；

設隨機變數X表示出現奇數的次數，求拒絕域為 $\{0,7\}$

$H_0: p=\frac{1}{2}$ vs. $H_1: p\neq\frac{1}{2}$　双尾檢定　$\alpha=0.025$

$P(X=x|p=\frac{1}{2})=C^7_x(\frac{1}{2})^7$

$P(X\le0)=P(X=0)=P(X\ge7)=P(X=7)=\frac{1}{128}\doteq0.0078$

$P(X=0)+P(X=1)>0.025$

$\frac{7}{128}\doteq0.0547$　$\Rightarrow X=0$ or 7

$\Rightarrow\{0,7\}$

$\boxed{6}$

$\frac{1}{x^3}(\tan2x+ax+x^2\sin bx)\Rightarrow\frac{1}{3x^2}(2\sec^2(2x)+a+2x\sin bx+bx^2\cos bx)$

$\Rightarrow 2+a=0$

$\Rightarrow\frac{1}{6x}(4\cdot2\sec(2x)\sec(2x)\tan(2x)+2(\sin bx+bx\cos2x)+b(2x\cos bx-bx^2\sin bx))$

$=\frac{1}{6x}(8\sec^2(2x)\tan(2x)+4bx\cos bx+(2-bx^2)\sin bx)$

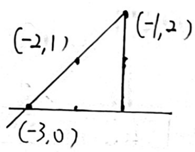
5. 設空間中有兩點$A(-1,-2,5)$、$B(1,5,4)$及一直線$L:\frac{x-3}{2}=\frac{-y}{2}=-z$，若$P$點為$L$上的一個動點，當$P$的坐標為$(a,b,c)$時，$\overline{PA}-\overline{PB}$會有最大值$d$，則$(a,b,c,d)=$ $(-3,6,3,3\sqrt{2})$

令$P(2t+3,-2t,-t)$

$\sqrt{(2t+4)^2+(-2t+2)^2+(t+5)^2}-\sqrt{(2t+2)^2+(-2t-5)^2+(-t-4)^2}$

$=\sqrt{9t^2+18t+45}-\sqrt{9t^2+36t+45}=\sqrt{9(t+1)^2+36}-\sqrt{9(t+2)^2+9}$

$=3(\sqrt{(t+1)^2+(0-2)^2}-\sqrt{(t+2)^2+(0-1)^2})\le3\sqrt{2}$



$t=-3$　$\Rightarrow P(-3,6,3)$

6. $\lim_{x\to0}(\frac{\tan2x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+\frac{\sin bx}{x})=0$，求$(a,b)=$ $(-2,\frac{-8}{3})$

$\Rightarrow\frac{1}{6}(8(2\sec(2x)\tan^3(2x)\cdot2+2\sec^4(2x))+4b(\cos bx-bx\sin bx)+(-2bx\sin bx)+(2-bx^2)\cdot b\cos bx)$

$\Rightarrow 16+6b=0\Rightarrow b=-8/3$

7. 平面上，一橢圓E的中心為$(0,0)$，且其一焦點為$F(5,0)$。若直線L通過F並交E於A,B兩點。若$\overline{AB}$的中點為$M(2,-2)$，求橢圓E的方程式為 $\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{50}=1$

令$A(a,b)$　$B(c,d)$

$\frac{a^2}{A}+\frac{b^2}{B}=1$，$\frac{c^2}{A}+\frac{d^2}{B}=1$　$\Rightarrow\frac{(a-c)\overbrace{(a+c)}^{4}}{A}+\frac{(b-d)\overbrace{(b+d)}^{-4}}{B}=0$

$\Rightarrow m=\frac{B}{A}=\frac{B}{B+25}=\frac{2}{3}\Rightarrow B=50\Rightarrow\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{50}=1$

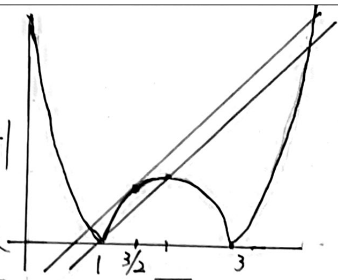
8. 若方程式 $|x^2-4x+3|-a=x$ 恰有4個實根，求實數 a 的範圍為

$-1<a<\frac{-3}{4}$

$\begin{cases} y=|(x-2)^2-1| \\ y=x+a \end{cases}$ $y=-x^2+4x+3$ $a+1=0 \Rightarrow a=-1$

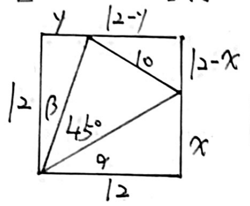
$m=-2(\frac{3}{2})+4=1$

$\frac{3}{2}+a=|\frac{1}{4}-1| \Rightarrow a=\frac{-3}{4}$ 相切，重根



9. 在梯形 $ABCD$ 中 $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$ 且 $\overline{AD}<\overline{BC}$，$\angle D=90^\circ$，$\overline{BC}=\overline{CD}=12$，$E$ 在 $\overline{CD}$ 上且 $\angle ABE=45^\circ$，若 $\overline{AE}=10$，試求 $\overline{CE}$ 的長度為

4 or 6



$(x-12)^2+(y-12)^2=100$

$1=\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\frac{x+y}{12}}{1-\frac{x}{12}\cdot\frac{y}{12}}$

$\Rightarrow \begin{cases} -xy=12(x+y)-144 \\ (x+y)^2-2xy-24(x+y)+144\times 2=100 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y=10 \\ xy=24 \end{cases} \Rightarrow x^2-10x+24=0 \Rightarrow x=6 \text{ or } 4$

16513

10. 設 $\omega\in\mathbb{C}$、$\omega\neq 1$ 且 $\omega^7=1$，計算 $\prod_{k=0}^{6}\left(\omega^{2k}+2\omega^k+4\right)$ 的值為

令 $f(x)=x^7-1$
$=(x-1)(x-w)\cdots(x-w^6)$

$(w^k+1)^2+3$
$=(w^k+1+\sqrt{3}i)(w^k+1-\sqrt{3}i)$
$=(-1-\sqrt{3}i-w^k)(-1+\sqrt{3}i-w^k)$

$f(-1-\sqrt{3}i)(-1+\sqrt{3}i)$
$=\left((2e^{i\frac{4}{3}\pi})^7-1\right)\left((2e^{i\frac{2}{3}\pi})^7-1\right)$

$=(2^7e^{i\frac{4}{3}\pi}-1)(2^7e^{i\frac{2}{3}\pi}-1)$
$=2^{14}-2^7(-1)+1$
$=16513$

2. 已知實數 x,y 滿足 $2xy(x^2-y^2)=x^2+y^2, x\neq 0$，求 x^2+y^2 的最小值。

2

令 $x^2+y^2=r^2$
$x=r\cos\theta=rc$
$y=r\sin\theta=rs$

$\Rightarrow 2r^2sc(c^2-s^2)=1$

$\Rightarrow r^2=\dfrac{2}{\sin 4\theta}\geq 2$

3. 已知平面上兩向量 $\overrightarrow{a}=(\cos\frac{3x}{2},\sin\frac{3x}{2})$, $\overrightarrow{b}=(\cos\frac{x}{2},-\sin\frac{x}{2})$，且 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$。

$\frac{13}{8}$

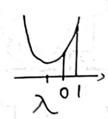
若 $f(x)=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-2\lambda|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$ 的最小值為 $\frac{-11}{2}$，求實數 λ。

$f(x)=\cos 2x-2(2\cos x)\lambda$

令 $g(c)=2c^2-4\lambda c-1$, $c\in[0,1]$

$\Rightarrow V(\lambda,\frac{-(16\lambda^2+8)}{8})$

(i) $\lambda<0$



$\frac{-11}{2}\neq g(0)$ 不合

(ii) $0<\lambda<1$ $\frac{16\lambda^2+8}{8}=\frac{11}{2}$

$\Rightarrow \lambda=\pm\frac{6}{4}$ 不合

(iii) $\lambda>1$

$g(1)=\frac{-11}{2}$

$\Rightarrow \lambda=\frac{13}{8}$

4. 數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 n 項總和為 S_n，已知 $\begin{cases} a_1=1 \\ S_{n+1}=4a_n+2 \end{cases}$，求一般項 a_n。**(整理計算或歸納證明之)**

$\boxed{a_n=(3n-1)\cdot 2^{n-2}}$

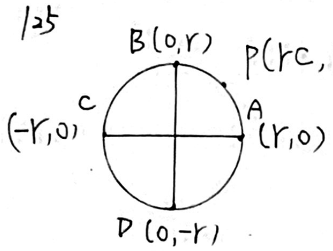
$S_n+a_{n+1}=4a_n+2$
$S_n\quad=4a_{n-1}+2$
$\Rightarrow a_{n+1}=4(a_n-a_{n-1})$

$x^2-4x+4=0$
$\Rightarrow x=2$
$a_n=(A+\beta n)\cdot 2^n$

$a_1=(A+\beta)\cdot 2=1$
$a_2=(A+2\beta)\cdot 4=5$
$\Rightarrow \beta=\frac{3}{4}, A=\frac{-1}{4} \Rightarrow a_n=(3n-1)\cdot 2^{n-2}$

5. 設 P 為正方形 $ABCD$ 之外接圓上的一點，其滿足 $\overline{PA}\cdot\overline{PC}=75$，$\overline{PB}\cdot\overline{PD}=100$，求正方形 $ABCD$ 的面積

125



$P(rc,rs)$

$r^2\sqrt{((c-1)^2+s^2)((c+1)^2+s^2)}=75$
$r^2\sqrt{(c^2+(s-1)^2)(c^2+(s+1)^2)}=100$

$\Rightarrow$ $4s^2r^4=75^2$, $4c^2r^4=100^2$

$\Rightarrow 2r^2=\sqrt{75^2+100^2}$
$=125$