一、填充題 I (每題 5 分，共 25 分)

1. 已知多項式 x^{26} 除以 x^2-x+2 的餘式為 $181x+8098$，求 x^{23} 除以 x^2-x+2 的餘式為_______。

2. 設 $f(x,y)=2x^2-4xy+4y^2-4x-4y+5$，其中 x, y 為實數，當 $x=m, y=n$ 時，$f(x,y)$ 有最小值 k，則數組（m, n, k）=__________。

3. 若 $\log\log a+\log\log b=\dfrac{1}{2}$，求 $(a^{\log b})\cdot(b^{\log a})$ 的整數部分為________位數。

4. 設 3 階方陣 A 不是零矩陣且 A 沒有反方陣。若 $A^2 = 114A$ 且 $(A-2I_3)^{-1} = pA + qI_3$，求數對 (p,q) =________。

5. 已知兩向量 $\left|\overrightarrow{a}\right| = \left|\overrightarrow{b}\right| = 1$，且 $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = \dfrac{1}{2}$，若向量 $\overrightarrow{c}$ 滿足 $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}$ 與 $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$ 夾角為 120^0，則 $\left|\overrightarrow{c}\right|$ 的最小值為__________。

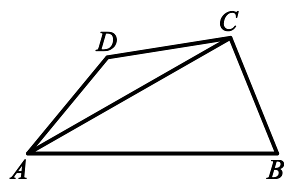
二、填充題Ⅱ (每題 6 分，共 48 分)

6. 有 6 個人有網路帳號，已知每個人都恰好與自己以外的 2 個人互為好友，則共有__________種不同的組成方法。

7. 設點 $K(0,-2)$ 為圓 C 的圓心。從圓 C 外一點 $P(5,13)$ 對圓 C 作兩條切線。若其中一條切線通過點 $Q(-16,10)$，求另一條切線和圓 C 相切的點的座標=_______。

8. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=6$，平面 ABC 外一點 P 到 A，B，C 三點的距離皆為 8，求 P 點到平面 ABC 的距離為_______。

9. 右圖為示意圖。平面上，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AD}=1$，$\triangle ABC$ 的面積為 S，$\triangle ACD$ 的面積為 T，則 S^2+T^2 的最大值為________。



10. 有一雙曲線Γ的貫軸長是共軛軸長的兩倍，令F_1、F_2分別為Γ的兩焦點，

A、B均為Γ上的兩定點，且$\overline{AB}$通過F_2且$\overline{AF_2} = 3\overline{BF_2}$，$\Delta F_1AB$的面積為$96$，

求Γ的貫軸長為______。

11. 二階方陣A將兩點$(217, 175)$與$(188, 410)$分別變換為$(83, 125)$與$(112, -110)$，今將點$P(135, 195)$經過A變換後的點P'，再將P'對直線$L: y = 2x$做鏡射後的點坐標為__________.

12. 在複數系裡，1的8個8次方根在複數平面上，恰為內接於單位圓的正八邊形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$的8個頂點，設P為此單位圓上一點，試求$\overline{PA_1} \times \overline{PA_2} \times \overline{PA_3} \times \overline{PA_4} \times \overline{PA_5} \times \overline{PA_6} \times \overline{PA_7} \times \overline{PA_8}$的最大值為________。

13. 設兩個實係數多項式函數 $f(x)$ 與 $g(x)$，並滿足

$f(x)=\left(\int_a^x g(t)dt\right)+x^3+6x^2-3x+4$ 與 $g(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)-\frac{1}{2}x^4-x^3+4x^2-11x+m$，

其中 a, m 均為常數，a 是整數，則數對（a, m）=__________。

三、計算證明題(每題 9 分，共 27 分，請詳列計算與證明過程。)

1. 小毅每天選擇午餐的來源有 3 種即福利社、自帶午餐與外訂午餐，已知小毅的習慣是<u>不選擇</u>與前天一樣的來源，假設 n 天($n\geq 2$)內小毅選擇午餐來源的所有方法中，第 n 天與第一天相同的方法數為 a_n；第 n 天與第一天不同的方法數為 b_n，可知 $a_2=3\times 0=0$，$b_2=3\times 2=6$，若 T 為二階方陣且 $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$，其中 n 為正整數且 $n\geq 3$。試求

   (1) 二階方陣 T。（4 分）

   (2) 當 $n\geq 2$ 時，a_n 的「一般項公式」。　（5 分）

2. 袋子裡有 $n+3$ 顆，其中紅球有 3 顆，黑球有 n 顆，今一次取一球，取後不放回，直到取到兩顆紅球就停止，以隨機變數 X 表示取到兩顆紅球停止時的次數，試求

(1)機率 $P(X=k)$，其中 k =2, 3, 4, …, $n+2$。　　（4 分）

(2) 隨機變數 X 的期望值 $E(X)$。　　（5 分）

3. 給定正整數 n，設 $f(x)$ 為實係數 $2n$ 次多項式函數。已知有兩兩相異的 n 個正數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使得 $f(x_1)=f(-x_1), f(x_2)=f(-x_2), \cdots, f(x_n)=f(-x_n)$。

試證：對於任意實數 x，等式 $f(x)=f(-x)$ 恆成立。　（9 分）

解答：

1. $967x-3082$
2. （$3,2,-5$）
3. 7
4. $(\frac{1}{224},\frac{-1}{2})$
5. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
6. 70
7. $(10,8)$
8. $\frac{8}{7}\sqrt{42}$
9. $\frac{31}{32}$
10. 24
11. (-35 , 55)
12. 2
13. (1, $\frac{13}{2}$)

三、

1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$；$a_n=2^{n-1}+2\cdot(-1)^{n-1}$，$n\ge 2$

2. $P\left(X=k\right)=\frac{6C_{k-2}^{n}}{kC_{k}^{n+3}}=\frac{6(k-1)(n-k+3)}{(n+3)(n+2)(n+1)}$；$E(X)=\frac{n+4}{2}$

3. 略