114中二中

二、計算證明題：每題 10 分，共 5 題，合計 50 分

$\frac{7}{6}$ A. 設 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(2-x)(x+x^{2n})}{1+x^{2n}}$，求 $\int_0^2 f(x)\,dx=$?

当 $0\le x<1$：$f(x)=(2-x)x=-x^2+2x$

当 $1\le x\le 2$：$f(x)=2-x$

$\int_0^1(-x^2+2x)\,dx+\int_1^2(-x+2)\,dx$

$=-\frac{1}{3}+1-\frac{3}{2}+2=3-\frac{11}{6}=\frac{7}{6}$

$12\sqrt{6}$ B. 設 A、B、C 是橢圓 $\Gamma:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{32}=1$ 上三點，且 ΔABC 的重心恰為此橢圓的中心，已知 $A(\sqrt{6}+\sqrt{2},\ 2\sqrt{3}-2)$，求 ΔABC 的面積為何?

$\Gamma:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=1$

$\Gamma':\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{32}=1$

$\left(\frac{y}{4}\right)^2=\left(\frac{y'}{4\sqrt{2}}\right)^2\Rightarrow y'=\sqrt{2}y$

$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

圓內接正△ $\longrightarrow$ $\Rightarrow A'=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot3=12\sqrt{6}$

$-2\sqrt{2}$ C. 坐標平面上，若四邊形的四個頂點都在函數 $f(x)$ 上，則稱此四邊形為 $f(x)$ 的內接四邊形。已知函數 $f(x)=x^3+ax$ 的圖形有唯一一個內接正方形，求 a 之值為何?

peterO210

$\begin{cases}y=x^3+ax\\y=mx\end{cases}\Rightarrow A(\sqrt{m-a},\ m\sqrt{m-a})$

$\begin{cases}y=x^3+ax\\y=-\frac{1}{m}x\end{cases}\Rightarrow B\left(\sqrt{-\frac{1}{m}-a},\ -\frac{1}{m}\sqrt{-\frac{1}{m}-a}\right)$

$\overline{OA}^2=\overline{OB}^2\Rightarrow(m-a)(m^2+1)=\left(-\frac{1}{m}-a\right)\left(\frac{1}{m^2}+1\right)$

$\Rightarrow a=\dfrac{m^3+m+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^3}}{m^2-\frac{1}{m^2}}=\dfrac{\left(m+\frac{1}{m}\right)^3-2\left(m+\frac{1}{m}\right)}{\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(m-\frac{1}{m}\right)}=\dfrac{\left(m-\frac{1}{m}\right)^2+2}{m-\frac{1}{m}}=m-\frac{1}{m}+\dfrac{2}{m-\frac{1}{m}}$

由圖形知 $a<0$

$\Rightarrow|a|\ge2\sqrt{2}$ $\Rightarrow a\ge2\sqrt{2}$（不合）or $a\le-2\sqrt{2}$ $\Rightarrow a=-2\sqrt{2}$

D. 已知一銳角三角形△ABC之邊長分別為 a,b,c。

令 r 為△ABC內切圓之半徑，R 為△ABC外接圓之半徑，

試證：(1) $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ （5 分）

(2) $\dfrac{abc}{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}\ge\dfrac{r}{2R}$ （5 分）

(1) $r=\dfrac{abc}{4RS}=\dfrac{2R\cdot2R\cdot2R\sin A\sin B\sin C}{4R\cdot2R\cdot\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{2}}$

$=2R\cdot\dfrac{8\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)}=4R\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi-C}{2}\right)$

$\sin\left(\frac{\pi-(A+B)}{2}\right)=\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$

分母 $=2\cos\left(\frac{C}{2}\right)\cdot2\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)$

(2) 王重鈞老師提供

即証明 $\dfrac{a^2}{b^2+c^2}\cdot\dfrac{b^2}{c^2+a^2}\cdot\dfrac{c^2}{a^2+b^2}\ge\left(2\sin^2\frac{A}{2}\right)\left(2\sin^2\frac{B}{2}\right)\left(2\sin^2\frac{C}{2}\right)$

而 $1-\dfrac{a^2}{b^2+c^2}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{b^2+c^2}\le\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}\Rightarrow\dfrac{a^2}{b^2+c^2}\ge2\sin^2\frac{A}{2}$，其他同理，故得証

E. 用 $|S|$ 表示集合 S 中元素的個數。已知集合 $S=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{113}\right\}$，$T=\{A\subseteq S\,\|A|=2n,n\in N\}$，試回答下列問題:

$2^{111}-1$ (1) $|T|=$? $C^{112}_2+C^{112}_4+C^{112}_6+\cdots+C^{112}_{112}=2^{111}-1$ thepiano

$\frac{3108}{113}$ (2) $\forall A_i\in T$，將 A_i 中所有的元素相乘的乘積記為 m_i，再將所有的 m_i 相加，其和為 M，求 M 之值?

令 $f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(x+\frac{1}{113}\right)$

peterO210

$=x^{112}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right)x^{111}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdots\right)x^{110}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\cdots\right)x^{109}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\cdots\right)x^{108}$
$+\cdots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{113}$

$\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{114}{113}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{112}{113}\right)-1=\frac{1}{2}\left(57+\frac{1}{113}\right)-1=\frac{3108}{113}$