2025.5.17(日)

~5.29(四)

臺中市立臺中第二高級中等學校

114 學年度 第 1 次教師甄選 數學科 試題

計 2 張 3 面

一、填充題：每格 5 分，共 10 格，合計 50 分

1. 設 $x\in R$，求 $f(x)=\sqrt{x^4-x^2-6x+10}-\sqrt{x^4-3x^2+4}$ 的最大值為 $\sqrt{10}$ 。

$\sqrt{(x^2-1)^2+(x-3)^2}-\sqrt{(x^2-2)^2+(x-0)^2}$

令 $P(x^2,x)$, $A(1,3)$, $B(2,0)$

$\overline{PA}-\overline{PB}\le\overline{AB}=\sqrt{10}$

2. 第一次段考英文考題包含選擇題與寫作題兩部分，某班學生英文選擇題分數 (X) 之標準差為 $\sigma_X=10$；寫作題分數 (Y) 之標準差為 $\sigma_Y=3$；兩部分分數相加後之英文成績 $(X+Y)$ 的標準差為 $\sigma_{X+Y}=12$。試求選擇題分數 (X) 與寫作題分數 (Y) 相關係數為 $\frac{7}{12}$ 。(答案以最簡分數表示)

$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$

$144=100+9+2r\sigma_x\sigma_y$

$\Rightarrow r=\frac{35}{60}=\frac{7}{12}$

3. 由 $1,2,3,\cdots,12$ 十二個數字中隨機取出四個相異的數，每個數被取出的機率皆相等，令 S 表示此四數的乘積，求 S 為完全平方數的機率為 $\frac{27}{495}$ 。

1 2^1 3^1 5^1 $2^1\times3$
2^2 3^2 5×2^1 $2^2\times3$
2^3

$\boxed{5^1\ 2^1\times5^1}$

$2^1\times3$ $2^2\times3$ 2^1 or 2^3 — 1, 2^2, 3^2 6個

2^1 or 2^3 — 1, 2^2, 3^2 8個

$2^1\times3^1-2^2\times3^1$, 3^1

$2^1\times3^1$ 3^1 2^1 or 2^3 — 1, 2^2, 3^2 6個

$2^2\times3$ 3^1: 1 1 2^2 2^1; 2^2 3^2 3^2 2^3 4個

3^2: 1 2^1 2^3; 2^1 2^2 2^3 2個

1 2^1 2^2 2^3 1個

$\frac{27}{495}$ ← C^{12}_4

4. 袋中有 5 張紙牌，其中有 2 張標記為「5 點」，另外 3 張標記為「4 點」，今從袋中隨機取出 2 張紙牌，若 2 張紙牌點數不同，則結束取牌；若 2 張紙牌點數相同，則將紙牌放回，並繼續取牌，直到 2 張紙牌點數不同，則結束取牌。試問取出紙牌之點數總和的期望值為 $\frac{44}{3}$ 。

$P_{54}=\frac{6}{10}$

$P_{55}=\frac{1}{10}$

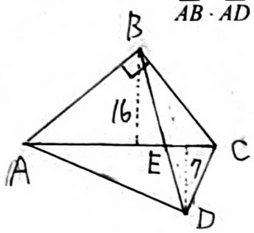
$P_{44}=\frac{3}{10}$

老鼠出迷宮

$\frac{平均時間}{逃出机率}\Rightarrow\frac{9\times\frac{6}{10}+10\times\frac{1}{10}+8\times\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}}=\frac{44}{3}$

5. 平面上，有一個四邊形 $ABCD$ 內接於圓 Γ，$\overline{AC}$ 為圓 Γ 的直徑、O 點為圓 Γ 的圓心。已知 $\overline{AB}=4\sqrt{5}$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=11$ 且 ΔOAB的面積:ΔOAD的面積$=16:7$，設 $\overrightarrow{AC}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AD}$，求數對 $(r,s)=$ $\underline{\left(\frac{35}{46},\frac{40}{23}\right)}$。

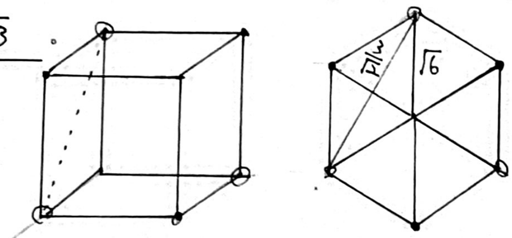


$$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AE}=k\left(\frac{7}{23}\overrightarrow{AB}+\frac{16}{23}\overrightarrow{AD}\right)$$

$$80=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=k\left(\frac{7}{23}\cdot 80+\frac{16}{23}\cdot 11\right)\Rightarrow k=\frac{5}{2}\Rightarrow r=\frac{35}{46},\quad s=\frac{40}{23}$$

6. 空間中，有一個邊長為 3 的正立方體，此正立方體在某平面 E 的投影為正六邊形，求此正六邊形的面積

為 $\underline{9\sqrt{3}}$。



$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6\cdot 6=9\sqrt{3}$$

7. 求滿足 $(a+bi)^{2002}=a-bi$ 的實數數對 (a,b) 有 $\underline{2004}$ 組。

令 $Z=a+bi$ $\quad |Z|^{2002}=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^{2002}=\sqrt{a^2+b^2}=|\bar{Z}|=|Z|$

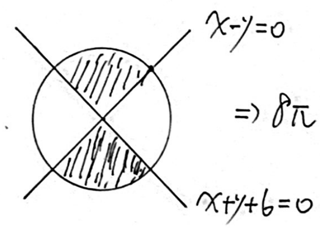
$$\Rightarrow |Z|\left(|Z|^{2001}-1\right)=0\Rightarrow |Z|=0 \text{ or } 1\rightarrow Z^{2002}=\frac{1}{Z}\Rightarrow Z^{2003}=1$$

1組 $\qquad$ 2003組

8. 已知 $f(x)=x^2+6x+1$，令符合兩條件 $f(x)+f(y)\le 0$ 與 $f(x)-f(y)\le 0$ 之點 (x,y) 所成的集合為 R，則區域

R 的面積為 $\underline{8\pi}$。

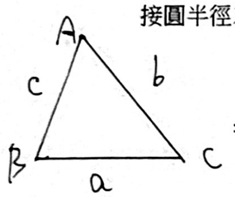
$$\begin{cases}(x+3)^2+(y+3)^2\le 16\\ (x-y)(x+y+6)\le 0\end{cases}$$



$\Rightarrow 8\pi$

9. ΔABC 中，角 A,B,C 所對的邊分別為 a,b,c，其中 $b\ge a$，若 $2a\cos(B+C)+c\cos B+b\cos C=0$，且 ΔABC 外

接圓半徑為 2，求 $2b-c$ 取值範圍為 $\underline{[2\sqrt{3},4\sqrt{3})}$。 $4\sin B\ge 2\sqrt{3}\Rightarrow \sin B\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos B\le\frac{1}{2}$



$a=2a\cos A\leftarrow 60^\circ$

$\Rightarrow a=(\sin 60^\circ)\cdot 2R$

$=2\sqrt{3}$

$4(2\sin B-\sin(120^\circ-2B))=6\sin B-2\sqrt{3}\cos B$ $\quad\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times 2$

$=2(3\sin B-\sqrt{3}\cos B)\in[2\sqrt{3},4\sqrt{3}]$

10. 計算 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2025}\frac{2^{-k}+1}{2^{-2k}-2^{-k+1}+2^{k+1}-1}=\underline{\frac{2^{2026}-2}{2^{2026}-1}}$。

令 $t=2^k$

$$\frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t^2}-1+2\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\frac{\frac{t+1}{t}}{\frac{1-t^2}{t^2}+2\cdot\frac{t^2-1}{t}}=\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1-t}{t^2}+2\cdot\frac{t-1}{t}\cdot\frac{t}{t}}=\frac{t}{\frac{2t^2-3t+1}{t^2}}=\frac{t}{(2t-1)(t-1)}=\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2t-1}$$

$$\sum_{k=1}^{2025}\left(\frac{1}{2^k-1}-\frac{1}{2^{k+1}-1}\right)=1-\frac{1}{2^{2026}-1}=\frac{2^{2026}-2}{2^{2026}-1}$$