2025.6.24(二) - 6.28(六)

Ru

國立高雄師範大學附屬高級中學 114 學年度 教師甄試

本科專業： 高 中 數 學 科 試題

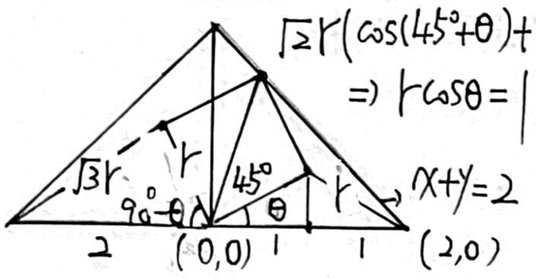
※考試時間： 15：20 ~ 16：40， 共 80 分鐘。

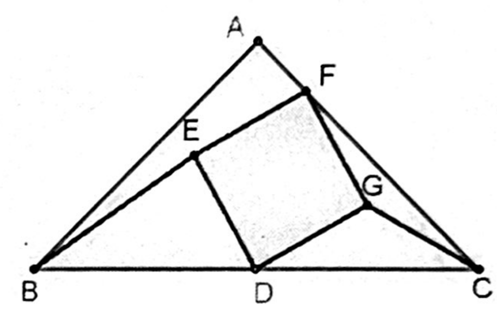
※作答注意事項：一律在答案卷上作答，請務必註明題號

計算證明題:(每題 10 分，共 100 分，每題須詳述計算過程，否則不予計分)

1. 如右圖，等腰直角$\triangle ABC$中，$\angle A = 90°$，D為$\overline{BC}$的中點，四邊形$DEFG$為正方形，且點F為$\overline{AC}$邊上。若$\overline{BE} = \sqrt{3}\cdot\overline{CG}$，$\overline{BC} = 4$，試求正方形$DEFG$的面積之值？

正確答案: $4-2\sqrt{2}$





$\sqrt{2}r(\cos(45°+\theta)+\sin(45°+\theta))=2$

$\Rightarrow r\cos\theta = 1$

$x+y=2$

$3r^2 = r^2+4-2\cdot 2r\cdot\frac{\sqrt{r^2-1}}{r}$

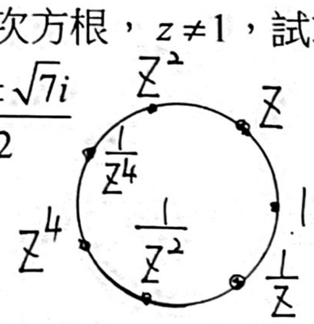
$(r^2-2)^2 = 4(r^2-1)$

$\Rightarrow r^4-8r^2+8=0$

$\Rightarrow r^2 = 4-2\sqrt{2}$

2. 設z是 1 的 7 次方根，$z \neq 1$，試求$z+z^2+z^4=$？

正確答案: $\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$



令

$\alpha = z+z^2+z^4$

$\beta = \frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}$

$\alpha+\beta=-1$

$\alpha\beta = 1+z^6+z^4+z+1+z^5+z^3+z^2+1 = 2$

$\Rightarrow \alpha^2+\alpha+2=0$

$\Rightarrow \alpha = \frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

3. 設$f(x)$為整係數多項式，假設$g(x)=\int xf(x)dx$，且$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = x^4-4x^2+x-7$，求多項式$f(x)$？

正確答案: $f(x)=x^3-7x+1$

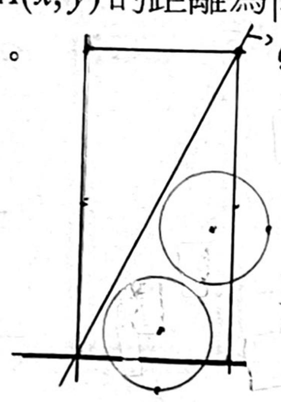
令$f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$

$\begin{cases} f'(x)+xf(x) = x^4-4x^2+x-7 \\ xf(x) = x^4+Ax^3+Bx^2+Cx \\ f'(x) = 3x^2+2Ax+B \end{cases}$

$\Rightarrow A=0,\ B=-7,\ C=1$

4. 座標平面上，在以$O(0,0)$，$P(0,2)$，$Q(1,2)$，$R(1,0)$為頂點的矩形(含邊界)，令Ω為滿足下述條件的點$A(x,y)$所成的區域: 與點$A(x,y)$的距離為$|2x-y|$之所有點所形成圖形完全落在矩形$OPQR$(含邊界)內，試求區域Ω的面積。

正確答案: $\frac{1}{2}$

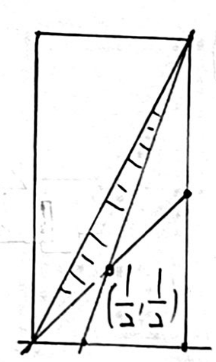


$2x-y=0$

$\begin{cases} 2x-y\geq 0 \\ x+|2x-y|\leq 1 \\ y-|2x-y|\geq 0 \end{cases}$

$3x-y\leq 1$

x	1	$\frac{1}{3}$
y	2	0

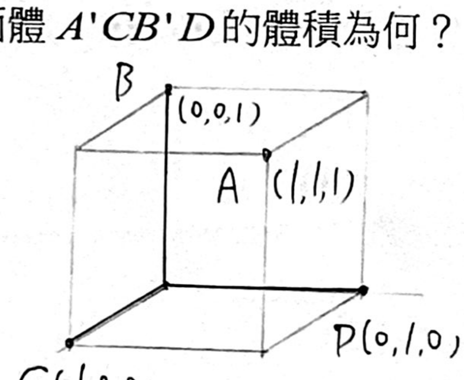


$\begin{cases} 2x-y\geq 0 \\ 3x-y\leq 1 \\ x-y\leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{5}}\times\sqrt{5} = \frac{1}{2}$

5.有一邊長為 2 的正四面體$ABCD$，設A'為A對平面BCD的對稱點，B'為B對平面ACD的對稱點，試求出四面體$A'CB'D$的體積為何？

正確答案: $\frac{10\sqrt{2}}{27}$



$A(1,1,1)$

$G_A(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

$A'(\frac{-1}{3},\frac{-1}{3},\frac{-1}{3})$

$B(0,0,1)$

$G_B(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$

$B'(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{-1}{3})$

$\begin{vmatrix} \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{DA'} \\ \overrightarrow{DB'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \frac{1}{9}\cdot 10\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{10\sqrt{2}}{27}$

<背面有題>

6. 重複操作一個成功機率為 p 的伯努力試驗，且 $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2(1-p)^k$，$\lim_{n\to\infty}S_n=180$，試求到第三次才出現第一次成功的機率。

正確答案: $\frac{16}{125}$

$180\frac{p}{1-p}=S\frac{p}{1-p}=\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}p=EX^2=\mathrm{Var}X+(EX)^2=\frac{1-p}{p^2}+\frac{1}{p^2}$

$\Rightarrow 180p^3=(1-p)(2-p)\Rightarrow p=\frac{1}{5}\quad\Rightarrow(1-p)^2p=\frac{16}{125}$

7. 設函數 $f(x)=|\log x|$，若 $a\neq b$，且 $f(a)=\frac{1}{2}f(b)=f(\frac{a+b}{2})$，求數對 $(a,b)=?$

正確答案: $(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}+3}{2})$

$\log(\frac{1}{a})=\log b^{\frac{1}{2}}=\log(\frac{a+b}{2})\Rightarrow a^3-2a+1=0$

$a^3-a-(a-1)$

$\Rightarrow b=\frac{1}{a^2}\Rightarrow a+\frac{1}{a^2}=2\cdot\frac{1}{a}\quad=(a-1)(a^2+a-1)=0\quad\Rightarrow a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$b=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

8. 曲線 $y=f(x)=x^3-3x^2+a$, $(0<a<4)$，試回答下列問題。 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

(1)試證 $f(x)=0$ 在 $0<x<2$ 之間恰有一實根 t。(3分)

正確答案:略

"∃" $f(0)f(2)=a(a-4)<0$

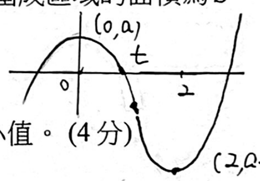
"!"

x		0		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

f is strictly decreasing on (0, 2)

(2)三直線 $x=0$，$x=2$，$y=0$ 與曲線 $y=f(x)$ 所圍成區域的面積為 S，試以 t 表示。(3分)

正確答案: $-\frac{3}{2}t^4+6t^3-6t^2+4(0<t<2)$



令 $F(x)=\frac{1}{4}x^4-t^3+at$

$f(t)=0\Rightarrow a=-t^3+3t^2$

$F(t)-F(0)+F(t)-F(2)$

$=\frac{1}{2}t^4-2t^3+2(-t^3+3t^2)t$

$-(2(-t^3+3t^2)-4)$

$=\frac{-3}{2}t^4+6t^3-6t^2+4$

(3)試求當 t 為多少時 S 有最小值，並求出 S 的最小值。(4分)

正確答案: $\frac{5}{2}$

$S'(t)=-6t^3+18t^2-12t$

$=-6t(t^2-3t+2)$

$=-6t(t-1)(t-2)$

$S(1)=\frac{5}{2}$

9.若數列 $<a_n>$ 中每一項均為正數，設數列 $<a_n>$ 之前項 n 的和為 S_n。已知 $\sum_{k=1}^{n}\frac{4S_k}{a_k+2}=S_n$，試求 a_n 及 S_n(皆以 n 的式子表示)。

則 $n=k+1$ 時, $k(k+1)+\frac{4(k(k+1)+a_{k+1})}{a_{k+1}+2}=k(k+1)+a_{k+1}$

正確答案: $a_n=2n(n\in N),S_n=n^2+n$

$\frac{4a_1}{a_1+2}=a_1$

$\Rightarrow a_1=2,\cdots a_2=4$

設 $n=k$ 時 $a_k=2k$

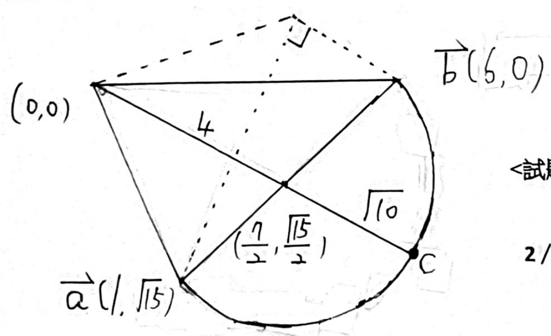
$S_k=k(k+1)$, $\frac{4S_k}{a_k+2}=\frac{4k(k+1)}{2(k+1)}=2k$

$\Rightarrow(a_{k+1})^2-2a_{k+1}-2k(2k+2)=0\Rightarrow a_{k+1}=2(k+1)$

$\Rightarrow a_n=2n$, $S_n=n(n+1)$ by M.I.

10.在坐標平面上，已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 為三個非零向量，其中 $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=6$，$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影長為1，若 $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$，試求 $|\vec{c}|$ 的最大可能值。

正確答案: $4+\sqrt{10}$



<試題結束>