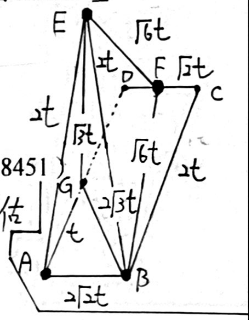
$-\frac{113}{2}$ 12. 甲、乙、丙、丁四人玩傳球遊戲，規定每次必須將球傳給其他三人的其中一人，且每人接到球的機會均等。若一開始球在甲手上，設 $n$ 次傳球後，球在甲手上的機率為 $P_n$，則 $\log_9(4\cdot P_{114}-1)$ 的值為________。

$\boxed{12}$ $4\left(\dfrac{\frac{1}{4}\left(3(-1)^{114}+3^{114}\right)}{3^{114}}\right)-1=3^{-113}$ . $\log_9 3^{-113}=-\frac{113}{2}$

$\boxed{13}$ $V_{EAPF}=\frac{1}{3}(\sqrt{2}t\cdot 2t)\cdot\sqrt{3}t=\frac{1}{3}(\sqrt{3}t\cdot\sqrt{3}t)\cdot 2$ ($\Delta APF$, $\Delta PEF$) $\Rightarrow 2t=\sqrt{6}$

$\sqrt{6}$ 13. 空間中有一四角錐 $E$-$ABCD$，其中底面 $ABCD$ 為矩形，$\Delta AED$ 為正三角形，且平面 $EAD$ 與平面 $ABCD$ 垂直。設 $G, F$ 分別為 $\overline{AD}, \overline{CD}$ 中點，且 $\angle EBG=30^\circ$，若 $A$ 到平面 $EFB$ 的距離為 2，則 $\overline{AD}=$




$\boxed{14}$ 令 $f(x)=(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n x^k \Rightarrow xf'(x)=\sum_{k=0}^{n}C_k^n k x^k \Rightarrow (f'(x)+xf''(x))x$

46 14. 級數 $\sum_{k=1}^{90}k^2\times C_k^{90}\times 2^{90-k}$ 的和為________位數。(參考數值：$\log 2\approx 0.3010, \log 3\approx 0.4771, \log 7\approx 0.8451$)

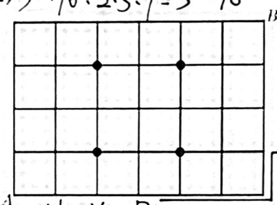
$\boxed{14}$ $(n(1+x)^{n-1}+xn(n-1)(1+x)^{n-2})x \overset{x=\frac{1}{2}}{\Rightarrow}$ $90\left(\frac{3}{2}\right)^{88}\left(\frac{3}{2}+\frac{89}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^{90}\to 3^{90}\cdot 10\cdot 2\cdot 46$ (用45估)

$\Rightarrow 3^{90}\cdot 10\cdot 2\cdot 5\cdot 9=3^{92}\cdot 10^2$

$92\cdot 0.4771+2$

$=45.8932\Rightarrow 46$ 位

$\frac{31}{21}$ 15. 如右圖從 $A$ 出發走捷徑到 $B$，假設走每條捷徑的機會均等，則經過圖中「●」個數的期望值為________個。




$\boxed{15}$ 左上：$C_3^5C_1^5=50$ 左下：$C_1^3C_3^7=105$

右下：50 右上：105

$E=\frac{(105+50)\cdot 2}{210}$

$n(S)=C_4^{10}=210$ $=1+\frac{10}{21}=\frac{31}{21}$

法：

法：說明

令4個「•」分別為 $Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4$

$X\equiv$ 過「•」的次數，$X_i\equiv$ 過 $Q_i$ 点的次數

$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4)=P_1+\cdots+P_4$

以2個点說明

恰过1点：$P_1P_2'+P_1'P_2$

恰过2点：$P_1P_2$

$E=P_1P_2'+P_1'P_2+2P_1P_2$

$=P_1+P_2$

$\frac{\sqrt{506}}{1012}$ 16. 設 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\cdots,\theta_{2025}$ 皆為銳角，且 $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3+\cdots+\sin^2\theta_{2025}=1$，則 $\dfrac{\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\cdots+\sin\theta_{2025}}{\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3+\cdots+\cos\theta_{2025}}$ 的最大值為__________。

$\boxed{16}$ $\cos^2\theta_1=\sin^2\theta_2+\cdots+\sin^2\theta_{2025}\geq\frac{(\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_{2025})^2}{2024}$

$\Rightarrow\cos\theta_1\geq\frac{\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_{2025}}{\sqrt{2024}}\Rightarrow\cos\theta_1+\cdots+\cos\theta_{2025}\geq\frac{2024(\sin\theta_1+\cdots+\sin\theta_{2025})}{\sqrt{2024}}\Rightarrow M=\frac{\sqrt{506}}{1025}$

## 第一部分：計算證明題

說明：

(1) 本部分為計算證明題，共 2 題，每題 10 分，每題配分於題後。

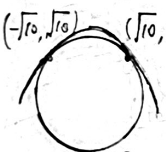
(2) 請依題號作答並附上計算過程，否則不予計分。

1\. 坐標平面上有一圓 $C: x^2+y^2=20$，試回答下列問題：

$y=-\frac{\sqrt{10}}{20}x^2+\frac{3\sqrt{10}}{2}$ (1)拋物線 $\Gamma_1$ 與圓 $C$ 相切於 $A(-\sqrt{10},\sqrt{10})$ 和 $B(\sqrt{10},\sqrt{10})$ 兩點，求拋物線 $\Gamma_1$ 的方程式為何？ (5 分)

$\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$ (2)拋物線 $\Gamma_2$ 與圓 $C$ 相切於 $D(2,4)$ 和 $E(-4,2)$ 兩點，求拋物線 $\Gamma_2$ 的頂點坐標為何？ (5 分)

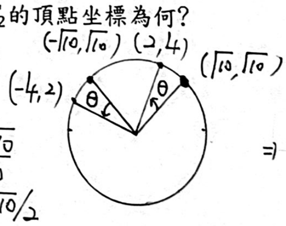
$\boxed{1}$ 令 $\Gamma: y=ax^2+b$, $a<0$. $D=4a^2b^2+4ab+1-4a^2b^2+80a^2=0$




$C: x^2+y^2=20$ $\Rightarrow 80a^2+4a(\sqrt{10}-10a)+1=0$

$10a+b=\sqrt{10}$ $\Rightarrow 40a^2+4\sqrt{10}a+1=0$ $a=\frac{-\sqrt{10}}{20}$

$a^2x^4+(2ab+1)x^2+b^2-20=0$ $\Rightarrow(2\sqrt{10}a+1)^2=0$ $b=3\sqrt{10}/2$



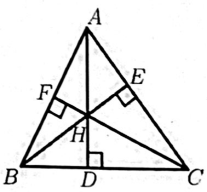

$2+4i=(\sqrt{10}+\sqrt{10}i)(c+is)$

$\Rightarrow\begin{cases}c-s=\frac{2}{\sqrt{10}}\\ c+s=\frac{4}{\sqrt{10}}\end{cases}\Rightarrow c=\frac{3}{\sqrt{10}}$ $s=\frac{1}{\sqrt{10}}$

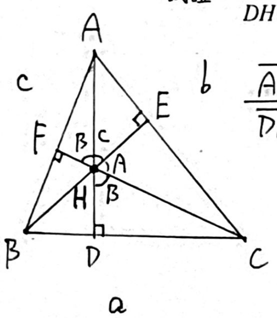
$\frac{3\sqrt{10}}{2}i\left(\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{10}}i\right)$

$=\frac{-3}{2}+\frac{9}{2}i$

2\. 如右圖，設 $\Delta ABC$ 為銳角三角形，$H$ 為 $\Delta ABC$ 三高 $\overline{AD}$，$\overline{BE}$，$\overline{CH}$ 的交點，




$\boxed{2}$ 試證：$\dfrac{\overline{AH}}{\overline{DH}}=\dfrac{\cos A}{\cos B\cos C}=\tan B\tan C-1$。




$\dfrac{\overline{AH}}{\overline{DH}}=\dfrac{\frac{\overline{AF}}{\sin B}}{\overline{HC}\cos B}$ $=\dfrac{-\cos(B+C)}{\cos B\cos C}=\dfrac{\sin B\sin C-\cos B\cos C}{\cos B\cos C}$

$=\dfrac{\frac{b\cos A}{\sin B}}{\frac{b\cos C}{\sin B}\cos B}=\dfrac{\cos A}{\cos B\cos C}$ $=\sim\#$