2025.6.3(二)

~6.9(一) Ru

臺中市立豐原高級中等學校 114 學年度第 1 次教師甄選數學科試題卷

第一部分：填充題

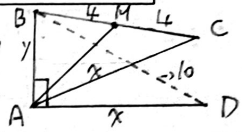
說明：

(1) 本部分為填充題，共 16 題，每題 5 分，請將答案化成最簡，否則不予計分。

(2) 請依題號將答案填入答案卷欄位作答區中，否則不予計分。

$-5x-3$ 1. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $(x+1)^4$ 的餘式為 x^3-1，則 $xf(x)$ 在 $x=-1$ 的一次近似（一次估計）為

[1] 令 $g(x)=(x(x+1)^4Q(x)+x^4-x$, $g'(-1)=-5$, $g(-1)=2$, $y=-5(x+1)+2=-5x-3$ [2]



$\sqrt{34}$ 2. 四邊形 $ABCD$ 中，$\angle BAD$ 為直角、$\overline{AC}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=8$，$\overline{BD}=10$。設 M 為 $\overline{BC}$ 中點，則 $\overline{AM}$ 長為

$100=x^2+y^2=2(\overline{AM}^2+16)$

$\Rightarrow \overline{AM}=\sqrt{34}$

$\frac{11}{4}$ 3. ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=\overline{AC}=13$，$\overline{BC}=10$。設 P 為 ΔABC 內部一點，滿足 $\overline{PB}=8$ 且 $\overline{PC}=6$，則 ΔPAB 面積與 ΔPAC 面積的比值為

[3] $\alpha-\theta$, $\alpha+\theta-90^\circ$, $90^\circ-\theta$

$\frac{4\sin(\alpha-\theta)}{-3\cos(\alpha+\theta)}=\frac{4(12\cdot4-5\cdot3)}{-3(20-36)}=\frac{4\cdot33}{3\cdot16}=\frac{11}{4}$

$3\sin(\alpha+\theta-90^\circ)$

$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{15}}{2})$ 4. 設 $z=a+bi$，其中 a,b 皆為正實數，$i=\sqrt{-1}$。已知 1、z、z^2、z^3 在複數平面上所對應的點依序為 A、B、C、D，且 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 P 點。若 $\overline{PC}=2\overline{PA}$，$\overline{PD}=5\overline{PB}$，則數對 $(a,b)=$

[4] thepiano $z^3-2z^2+5z-4=0$ $(z-1)(z^2-z+4)=0$ $\frac{1+\sqrt{15}i}{2}$

$P=\frac{2}{3}A+\frac{1}{3}C=\frac{5}{6}B+\frac{1}{6}D$

$\frac{25}{7}$ 5. 坐標平面上，給定圓 $C:x^2+y^2=9$ 及一點 $A(-5,0)$。過 A 點作圓 C 的兩切線得切點分別為 B、C。設 P 點滿足 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AC}$（其中 $k>0$），則當 $k=$________時，$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$ 有最大值。

[5] $t=\frac{3}{4}$ $4\times\frac{25}{7}$ 4 固定

$\frac{52}{3}$ 6. 設 a,b 為實數，若三次多項式 $f(x)$ 的最高次項係數為 1，$f(0)=f(a)=f(b)=-13$，且 $f(x)$ 的對稱中心為 $(3,-15)$，則 $a\cdot b$ 值為

[6] $(x-3)^3+p(x-3)-2=0$ $a\cdot b\cdot 0=3p+29$ $ab=27+p=\frac{52}{3}$

$g(x)=f(x)+13=0 \Rightarrow x^3-9x^2+(27+p)x-29-3p=0 \Rightarrow p=\frac{-29}{3}$

$\frac{b}{a}=\frac{\sin A}{\sin B}$ 當 $\angle B=90^\circ$ 有 max

$10+5\sqrt{3}$ 7. 在坐標平面上，點 Q 坐標為 $(6,8)$。考慮二階方陣 $A=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&-3\\3&4\end{bmatrix}$ 所定義的線性變換。對於平面上異於原點 O 的點 P_1，設 P_1 經 A 變換成 P_2，P_2 經 A 變換成 P_3。若 $\Delta P_1P_2P_3$ 的面積為 9，則 $\overline{QP_1}$ 最大值為

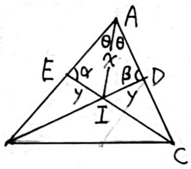
$9=\frac{1}{2}r^2(2\sin\theta-\sin2\theta)$ $\frac{6}{5}-\frac{24}{25}=\frac{6}{25}$ $r=\frac{15}{\sqrt{3}}=5\sqrt{3}$

$\lambda\neq0$ and $\lambda\neq1$ 8. 若二次方程式 $ix^2-(i+1)x+\lambda=0$，$(i=\sqrt{-1};\lambda\in R)$ 有兩個虛根，則 λ 的範圍為

[8] $ix(x-1)+\lambda-x=0$ $x\in\mathbb{R} \Rightarrow \lambda=x=0$ or 1

$2\sqrt{3}$ 9. 有一非等腰三角形 ΔABC 的內心為 I，直線 $\overline{BI}$、直線 $\overline{CI}$ 分別交 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 於 D、E 兩點，若 $\overline{BC}=6$，且 $\overline{IE}=\overline{ID}$，則 ΔABC 的外接圓半徑長為________。

[9]



$\frac{x}{y}=\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}=\frac{\sin\beta}{\sin\theta} \Rightarrow \alpha+\beta=180^\circ$ or $\alpha=\beta$ 不合

$\Rightarrow \frac{3}{2}(\angle B+\angle C)=\angle B+\frac{1}{2}\angle C+\angle C+\frac{1}{2}\angle B=180^\circ$

$\Rightarrow \angle A=60^\circ$ $2R=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow R=2\sqrt{3}$

$\frac{2\pi^2}{9}$ 10. 有一數列 $\langle a_n\rangle$ 每項都是正實數，且滿足

$$a_1=\frac{1}{2}\ ,\ a_n=2(a_{n+1})^2-1\quad(n\geq1),$$

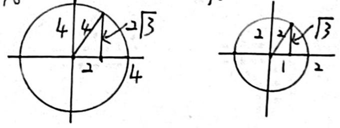
則 $\lim_{n\to\infty}4^n(1-a_n)$

[10] $a_1=\cos\frac{\pi}{3}$, $a_2=\cos(\frac{\pi}{3\cdot2^1})$, $a_2^2=\frac{1}{2}(1+\cos\frac{\pi}{3})$, $a_n=\cos(\frac{\pi}{3\cdot2^{n-1}})$

$\frac{4^n(1-\cos\frac{\pi}{3\cdot2^{n-1}})(1+\cos\frac{\pi}{3\cdot2^{n-1}})}{1+\cos\frac{\pi}{3\cdot2^{n-1}}} \to \frac{4^n\sin^2(\frac{\pi}{3\cdot2^n}\cdot2)\cdot(\frac{\pi}{3\cdot2^n}\cdot2)^2}{2\cdot(\frac{\pi}{3\cdot2^n}\cdot2)^2} \to \frac{2\pi^2}{9}$

$\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$ 11. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sqrt{16n^2-1^2}+\sqrt{16n^2-3^2}+\sqrt{16n^2-5^2}+\cdots+\sqrt{16n^2-(2n-1)^2})$ 的值為________。

[11] $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n}\sqrt{16n^2-k^2}-\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{16n^2-(2k)^2} \to \int_0^2\sqrt{16-x^2}\,dx-2\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx=\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi$



$(\frac{1}{2}\cdot4\cdot4-\frac{2}{2}\cdot2\cdot2)\cdot\frac{\pi}{6}$