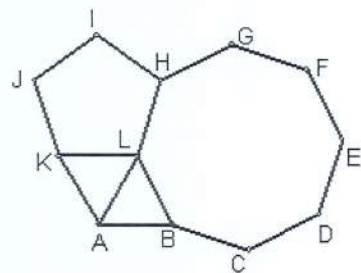


一、單選題：100 分(共 50 題，每題 2 分)

1. 設 $\{a_n\}$ 為一數列，且 $a_n \neq 0$ ，其中 $n = 1, 2, 3, \dots$ ，如果 $a_1 = 97$ ，且當所有正整數 $n > 1$ 時， $a_n = \frac{n}{a_{n-1}}$ ，則前 10 項的乘積 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_{10}$ 之值為下列何者？ (A) 960 (B) 1920 (C) 3840 (D) 7680
2. 試問下列 6 個數中，有幾個數是大於 10？ $7\sqrt{2}$ ， $6\sqrt{3}$ ， $5\sqrt{5}$ ， $4\sqrt{7}$ ， $3\sqrt{11}$ ， $3\sqrt{5} + \sqrt{11}$
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
3. 已知二數 $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ， $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ，其中 $i^2 = -1$ ，則下列何者錯誤？
(A) $z_1^7 + z_2^7 = -1$ (B) $z_1^9 + z_2^9 = -1$ (C) $z_1^{11} + z_2^{11} = -1$ (D) $z_1^{13} + z_2^{13} = -1$
4. 設 a, b 皆為正數，如果 $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ 且 $\log_8 b + \log_4 a^2 = 7$ ，則 ab 之值為下列何者？
(A) 64 (B) 128 (C) 256 (D) 512
5. 已知數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ 是一個公差為 1 的等差數列，且 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{99} + a_{100} = 250$ ，則 $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{98} + a_{100}$ 之值為下列何者？
(A) 120 (B) 130 (C) 140 (D) 150
6. 設 a 為小於 15 之正數，已知函數 $f(x) = |x - a| + |x - 15| + |x - a - 15|$ ，則當 $a \leq x \leq 15$ 時， $f(x)$ 之最小值為下列何者？ (A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15
7. 如右圖， $\triangle AKL$ 為正三角形， $HIJKL$ 為正五邊形，且 $BCDEFGHL$ 為正八邊形，且 L 為此三圖形之公共頂點，則 $\angle ABL$ 的度數為多少度？
(A) 55 (B) 57 (C) $\frac{123}{2}$ (D) $\frac{125}{2}$
8. 設 x, y 為實數，如果 $\tan x + \tan y = 25$ ， $\cot x + \cot y = 30$ ，則 $\tan(x + y)$ 之值為下列何者？
(A) 60 (B) 120 (C) 150 (D) 180
9. 試問 41^{48} 除以 100 的餘數為下列何者？ (A) 11 (B) 21 (C) 41 (D) 81
10. 設 a, b, c, d 為正整數，如果 $a^5 = b^4$ ， $c^3 = d^2$ ，且 $c - a = 19$ ，則 $d - b$ 之值為下列何者？
(A) 243 (B) 729 (C) 757 (D) 919

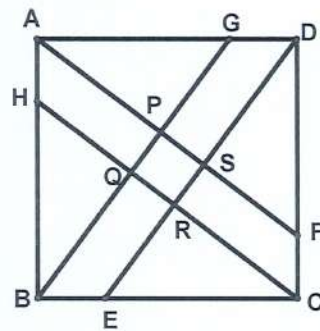


11. 已知函數 $f(x) = \frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$ ，其中 $0 < x < \pi$ ，則函數 $f(x)$ 在 $0 < x < \pi$ 之最小值為下列何者？
 (A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 18
12. 已知一多項式 $f(x) = x^{2025}(x^2 + ax + b)$ ，其中 a, b 為實數，如果將 $f(x)$ 除以 $(x - 2)^2$ ，得到餘式為 $2^{2025}(x - 2)$ ，則 $b = ?$ (A) -3 (B) -2 (C) 2 (D) 3
13. 已知在一圓周上自某一點開始，依順時針方向分別依序填入 268 個整數，使得依順時針方向數起，每 20 個連續的數之和都是 75。如果在第 17 個位置上填入整數 3，在第 83 個位置上填入整數 4，且在第 144 個位置上填入整數 9，那麼第 210 個位置上的整數為下列何者？
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 3
14. 試問矩陣 $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ 的秩(rank)是多少？ (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
15. 設一函數 f 之定義域為所有正整數，如果 $f(1) = 101$ ，且對所有正整數 $n > 1$ ，
 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$ 都成立，則 $f(100)$ 之值為下列何者？
 (A) $\frac{1}{100}$ (B) $\frac{1}{50}$ (C) $\frac{100}{101}$ (D) 1
16. 已知 α, β, γ 均為大於 0 的數，且滿足 $\frac{7\alpha + \beta + 7\beta + \gamma + 7\gamma + \alpha}{49\alpha + 49\beta + 49\gamma} = 1$ ，則 $3\alpha - 5\beta + 2\gamma$ 的值為下列何者？
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
17. 如果聯立方程組 $\begin{cases} 4xy - 7\sqrt{xy + 1} = 11 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ 的解為 $x = a, y = b$ ，其中 $xy > -1$ ，則此方程組解 (a, b) 共有多少組？ (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
18. 將 $3^2 \times 4^{16} \times 5^{25}$ 乘開後是幾位數？ (A) 27 (B) 28 (C) 29 (D) 30
19. 有一個 n 位數 A ，具備以下兩個性質：(a) A 中每一位數的數字都是 1 或 2，(b) A 中至少有相鄰的二個數字都是 1，例如： $n = 3$ ， $A = 112, 211$ 及 111 都滿足此二性質。
 又有另一個 m 位數 B ，也具備以下兩個性質：(a) B 中每一位數都是 0 或 1，(b) B 中至少有相鄰的二個數字都是 0，例如： $m = 3$ ， $B = 100$ 滿足此二性質。
 若 a_n 表示 n 位數 A 的個數， b_m 表示 m 位數 B 的個數，則 $a_4 + b_4$ 之值為下列何者？
 (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

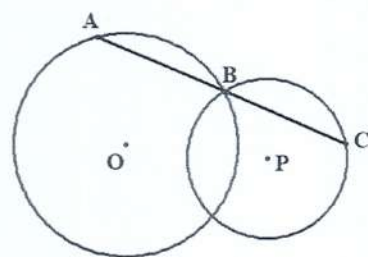


20. 已知 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 的值正好都是 $-1, 0, 1$ 中的數，則 $a_0 + 3a_1 + 3^2a_2 + 3^3a_3 + 3^4a_4$ 的值是正整數共有多少個？ (A) 121 (B) 122 (C) 123 (D) 124

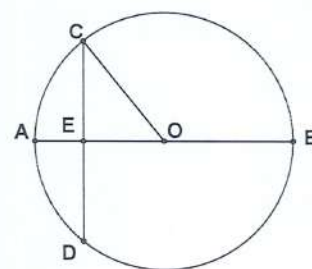
21. 如右圖，正方形 $ABCD$ 中，其邊長為1，將每邊作 n 等分，其中 n 為正整數，且點 E, F, G, H 都是各邊上的等分點，使得 $\overline{BE} = \overline{CF} = \overline{DG} = \overline{AH} = \frac{1}{n}$ ；分別作 $\overline{AF}, \overline{CH}, \overline{BG}, \overline{DE}$ ，此四線段分別交於 P, Q, R, S 四點。如果四邊形 $PQRS$ 的面積為 $\frac{1}{421}$ ，試問 n 值為下列何者？



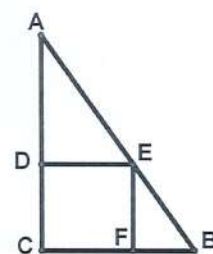
- (A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17
22. 設圓 O 和圓 P 分別表示圓心為 O 和圓心為 P 之二圓，又圓 O 的半徑為8，圓 P 的半徑為6，且圓心距 $\overline{OP} = 12$ 。如果點 B 為此二圓相交之其中一點，過 B 點作一直線分別交圓 O 及圓 P 於 A, C 二點，使得 $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，如右圖所示，則 $\overline{AB}$ 之長為下列何者？



- (A) $\sqrt{130}$ (B) 16 (C) $2\sqrt{65}$ (D) $2\sqrt{130}$
23. 右圖表示以點 O 為圓心， $\overline{AB}$ 為直徑的圓， $\overline{CD}$ 垂直於 $\overline{AB}$ 且交於 E 點，如果 $\overline{AB}$ 的長度為二位整數，且 $\overline{CD}$ 的長度正好是此二位數的個位數字與十位數字互換位置；又 $\overline{OE}$ 的長度為正有理數，則直徑 $\overline{AB}$ 的長度為下列何者？



- (A) 54 (B) 63 (C) 65 (D) 75
24. 直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ，且斜邊 $\overline{AB} = 35$ 。今在三邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 及 $\overline{BC}$ 上分別取一點 E, D, F ，使得四邊形 $CDEF$ 為一正方形，且其邊長為12，如右圖所示，則直角三角形 ABC 之二股長之和為下列何者？



- (A) 25 (B) 28 (C) 31 (D) 49
25. 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 6$ ，且 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 5x) = 2$ ，則極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + 4x}{xf(x) - 5x^2 + 2}$ 之值為下列何者？

- (A) 2 (B) $\frac{5}{2}$ (C) 3 (D) 5



26. 設 $\frac{b}{a}$ 為假分數，且 $b < a < c < 0$ ，則下列何者正確？

- (A) $\frac{b}{a} < \frac{b-c}{a-c}$ (B) $\frac{b}{a} = \frac{b-c}{a-c}$ (C) $\frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c}$ (D) $\frac{b}{a} = \frac{b+c}{a+c}$

27. 下列那一組相關係數排列，是依兩變數之間線性關係強烈程度，從弱到強呈現？

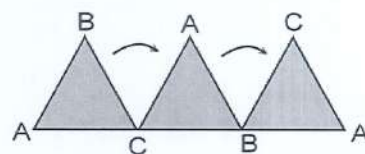
- (A) $-0.65, -0.33, -0.10, +0.43$ (B) $-0.65, +0.43, -0.33, +0.10$
(C) $+0.10, -0.33, +0.43, -0.65$ (D) $-0.10, -0.33, -0.65, +0.43$

28. 小美班上期中考的英文與數學成績統計如下：全班英文的平均分數為 70 分，標準差為 7 分，數學的平均分數為 65 分，標準差為 5 分。小美英文得 84 分，數學得 75 分。請問相較於全班同學，小美：

- (A) 英文成績較佳 (B) 英文與數學一樣好
(C) 數學成績較佳 (D) 平均數與標準差皆不同，兩科成績無法比較

29. 如右圖，將邊長為 9 的正三角形沿著水平線翻滾 2 次，

求 A 點從開始到結束所經過的路線長？



- (A) 27π (B) 18π (C) 15π (D) 12π

30. 已知捷速租車行在市區設有甲、乙兩個營業據點。顧客租車後，須在當日營業結束前將車輛歸還至任一據點。某日營業結束清點時，發現在甲歸還的機車比從甲出租的機車少 3 輛。已知：從甲出租且在甲歸還的機車有 20 輛，從乙出租且在乙歸還的機車有 18 輛。關於該日從甲、乙出租的機車總數，下列何者正確？

- (A) 從甲出租的比從乙出租的多 3 輛 (B) 從甲出租的比從乙出租的少 3 輛
(C) 從甲出租的比從乙出租的多 5 輛 (D) 從甲出租的比從乙出租的少 5 輛

31. 已知 7 年 8 班有 10 位男生與 8 位女生，導師要從中選取 16 人組成游泳隊培訓，若男、女生的人數相差不超過兩位，請問有多少種可能的組合？ (A) 153 (B) 125 (C) 80 (D) 45

32. 隨機抽樣 30 個受試者，得 X 變數的平均為 60，標準差為 10，請問母群平均數與標準差的不偏估計值？

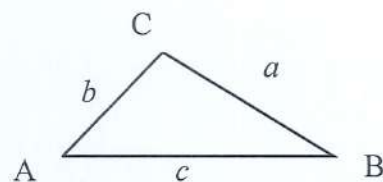
- (A) $\mu = 72; s = 10.34$ (B) $\mu = 60; s = 10.34$
(C) $\mu = 60; s = 10$ (D) $\mu = 60; s = 10.17$



33. 右圖中，若三角形的三邊滿足關係式

$(a+b):(b+c):(a+c)=4:5:6$ 求角 C 的度數。

(A) 100 度 (B) 120 度 (C) 135 度 (D) 150 度



34. 某班的英文期末考的平均分數為 68.2 分，標準差為 7.5 分，小美在這次考得 82 分。問小華的 z 分數為何？

(A) 10.93 (B) 1.84 (C) -1.84 (D) 1.90

35. 把 0、1、2、3 四個數字組成數字不重複的四位數，例如：2341，請問這些四位數的總和是多少？

(A) 38,664 (B) 39,996 (C) 33,330 (D) 29,997

1904 年，瑞典數學家 Helge von Koch (1870-1924) 在探討「一條曲線能否無限凹折而又處處連續」的問題時，提出了日後聞名的 Koch 雪花 (Koch snowflake)。這種幾何圖形從一個正三角形出發，透過不斷重複下列製作規則，逐步產生出邊緣「像雪花般尖刺」的圖案(如下圖所示)：

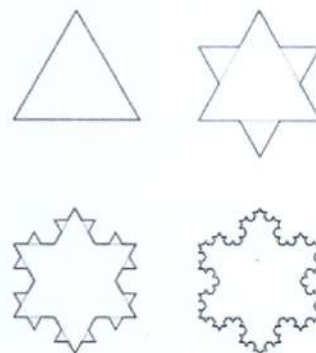
甲、把每條邊平分為三段；

乙、於中段向外作一個與原邊同長 $\frac{1}{3}$ 的新正三角形；將原中段刪除。

丙、把「每一階」完成後所得的新圖形稱為第 n 階 ($n=0, 1, 2, \dots$)，

其中第 0 階就是起始的正三角形。如無限次重複上述步驟 ($n \rightarrow \infty$)，

便得到 Koch 雪花的極限圖形。



依據上列敘述回答第 36、37 題：

36. 設起始正三角形的邊長為 1，依 Koch 規則無限次遞迴後，請問該雪花的極限面積是多少？

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (D) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$

37. 該雪花的周長在階數趨近無限大時為多少？ (A) 9 (B) 12 (C) $8\sqrt{3}$ (D) 無限大

38. 已知有十個人的年齡如下：24、36、18、28、20、x、44、28、40、50，若這些人年齡的中位數最小值為 a 歲，最大值為 b 歲，則 $b-a$ 為多少？ (A) 3 (B) 4 (C) 7 (D) 11



39. 已知函數 $f(x) = f(c) + c_1(x-c) + c_2(x-c)^2 + \cdots + c_n(x-c)^n, n \geq 5$, 試問下列敘述何者不正確?

(A) $f(x)$ 在 $x=c$ 處的切線方程式為 $y = f(c) + c_1(x-c)$

(B) 若函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 有相對極大值, 則 $c_1=0$

(C) 若函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 有反曲點產生, 則 $c_2=0$

(D) 若 $c_1=0$, 則函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 發生極值

40. 已知 $\frac{13\cos x + 1}{2-4\cos x} = 3$ 且 $\tan x < 0$, 請問 $\sin x$ 值為何? (A) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ (C) $\frac{-2\sqrt{6}}{5}$ (D) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$

41. 求解不等式 $3^{x+2} > 5(2^{2x-1})$

(A) $x < \log_4(\frac{18}{5})$ (B) $x > \log_4(\frac{18}{5})$ (C) $x < \log_{\frac{4}{3}}(\frac{5}{18})$ (D) $x < \log_{\frac{3}{4}}(\frac{18}{5})$

42. 有一顆特殊的六面骰, 已知其點數與出現的機率成正比, 現投擲此骰子 4 次, 令 X 為 4 次當中出現

點數恰為 3 的次數, 那麼 $P(X=2)$ 的值為何? (A) $\frac{216}{2401}$ (B) $\frac{216}{343}$ (C) $\frac{36}{343}$ (D) $\frac{36}{2401}$

43. 已知投擲某枚硬幣, 已知出現正面的機率為 p , 出現反面的機率為 $(1-p)$ 。現投擲此硬幣 n 次, 在投

擲的過程中, 第一次正面出現時, 可獲得 1 元, 第二次正面出現時, 可再獲得 2 元, 第三次正面出現時, 可再獲得 3 元, 依此類推。請問下列敘述何者正確?

(A) 總共得到 $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ 元的機率為 $\frac{n}{2}(p^{n-1} - p^n)$

(B) 投擲硬幣第二次之後, 累計獲得 1 元的機率為 $2(p - p^2)$

(C) 若 n 次投擲中出現正面 r 次, 總共可拿到 $\frac{1}{2}(r^2 - r)$ 元

(D) 若 n 次投擲後累計獲得 3 元, 其機率為 $C_3^n p^3 (1-p)^{n-3}$

44. 已知 $P(a, b)$ 為橢圓 $4(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$ 上的一點, 請問 $3a+2b-2$ 的最小值為何?

(A) 11 (B) 9 (C) -9 (D) -11

45. 小美想要製作一些窗簾與桌布來增加收入。已知一件窗簾需花 50 分鐘的準備時間及 75 分鐘的裁縫

時間, 而一件桌布需花 60 分鐘的準備時間及 45 分鐘的裁縫時間。每星期小美最多只能花 16 小時來進行準備工作, 而縫紉機最多只能工作 15 小時, 若窗簾的件數需少於或等於桌布的件數, 且每間窗簾可獲利 140 元, 每件桌布可獲利 120 元。請問小美一週可得的最高利潤是多少?

(A) 2,040 (B) 2,020 (C) 2,000 (D) 1,940



46. 已知參加健康檢查的 40 歲婦女中有 1% 罹患乳癌；而罹患乳癌的婦女，有 80% 的人乳房 X 光檢測結果呈現陽性。另外，有 9.6% 沒有乳癌的婦女其檢測結果卻是陽性。假設有一名 40 歲婦女經乳房 X 光檢測後呈現陽性判定，則該婦女確實為乳癌患者的機率有多高？
- (A) 80% (B) 19.2% (C) 7.76% (D) 0.8%
47. 在 $\triangle ABC$ 中，已知向量 $\overrightarrow{AB} = (3, 4)$ ， $\overrightarrow{AC} = (8, -6)$ 。若點 D 在 $\overline{BC}$ 上，且滿足 $\overline{BD} : \overline{CD} = 2:1$ ，則 $\triangle ABD$ 的面積為何？ (A) 25 (B) $\frac{50}{3}$ (C) $\frac{25}{2}$ (D) 50
48. 在平面直角坐標系中，考慮拋物線 $y = 12 - x^2$ 與 x 軸所圍成的封閉區域。欲在此區域內畫一個矩形，使其一邊在 x 軸上，其餘兩頂點在拋物線上。請求出此矩形的最大可能面積為何？
- (A) 64 (B) $16\sqrt{3}$ (C) 32 (D) 16
49. 已知直線 L_1 與 L_2 為空間中兩相異直線，則下列敘述何者不正確？
- (A) 若 L_1 與 L_2 相交，則可決定唯一平面
- (B) 若 L_1 與 L_2 同時垂直於平面 E，則 L_1 與 L_2 必互相平行
- (C) 若 L_1 與 L_2 同時垂直於平面 E，則 L_1 與 L_2 必互相垂直
- (D) 若直線 L_1 與 L_2 為歪斜線，則 L_1 與 L_2 不相交
50. 在空間中，給定兩歪斜線 $L_1 : \frac{x-7}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-10}{-2}$ 與 $L_2 : \frac{x-3}{1} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-2}{1}$ 。若在直線 L_1 上取一點 P，在直線 L_2 上取一點 Q，使得線段長 $\overline{PQ}$ 最短，試求 $\overline{PQ}$ 距離為何？
- (A) $2\sqrt{7}$ (B) $\frac{12\sqrt{2}}{5}$ (C) $\sqrt{17}$ (D) 3

