一、填充題(每格 5 分，共 85 分)

1. 設複數 z 滿足 z^3 為純虛數，且滿足 $\left|z^3+4-5i\right|=5$，試求 $|z+i|$ 的最小值。

2. 從一正立方體的稜邊中點中，任選兩點，設為 A,B，試問可形成幾種不同的 $\overrightarrow{AB}$？

3. 有編號 1~12 的整數牌各 1 張，將這 12 張牌隨機排成一列，並將這 12 張牌依序分成三區。排列在前 4 張稱為第一區，接下來的 3 張牌稱為第二區，剩下的 5 張牌稱為第三區。已知最大數字牌(即 12 號牌)出現在第三區的第一個位置，且 9 號牌亦在第三區，試求：第二區中的每張牌皆小於第一區中編號前兩大的牌的機率為何？(例如：$\boxed{8,10,11,3}$,$\boxed{1,2,7}$,$\boxed{12,4,5,6,9}$ 可；$\boxed{8,11,5,4}$,$\boxed{10,7,6}$,$\boxed{12,1,9,3,2}$ 不可(因為第二區的 10 號牌大於第一區中第二大的 8 號牌)。)

4. 坐標平面上有 A,B,C,D 四點，已知 $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$，$\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{BD}$ 夾角的餘弦值等於 $\dfrac{7}{9}$，且 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ ，試求 $\cos\angle BAC$ 的值。

5. 在坐標平面上，有甲、乙、丙三隻狗，分別站在一個三角形的三個頂點 A_0,B_0,C_0 ，接下來，每一回合三隻狗會同時移動，並依照下列規則各自朝對方追逐：
甲狗朝乙狗的位置直線移動，但只移動兩者距離的 $\dfrac{1}{4}$(例如第一回合中，甲狗移動了 $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{A_0B_0}$)；乙狗朝丙狗的位置直線移動，但只移動兩者距離的 $\dfrac{1}{5}$；丙狗朝甲狗的位置直線移動，但只移動兩者距離的 $\dfrac{1}{6}$。設第 k 回合($k=0,1,2,\cdots$)後三隻狗的位置構成一個 3×2 的坐標矩陣 X_k ，其中 X_k 的第 1、2、3 列分別為甲、乙、丙三隻狗的 (x, y) 坐標。已知此運動滿足 $X_{k+1}=MX_k$ ，試求矩陣 M 。

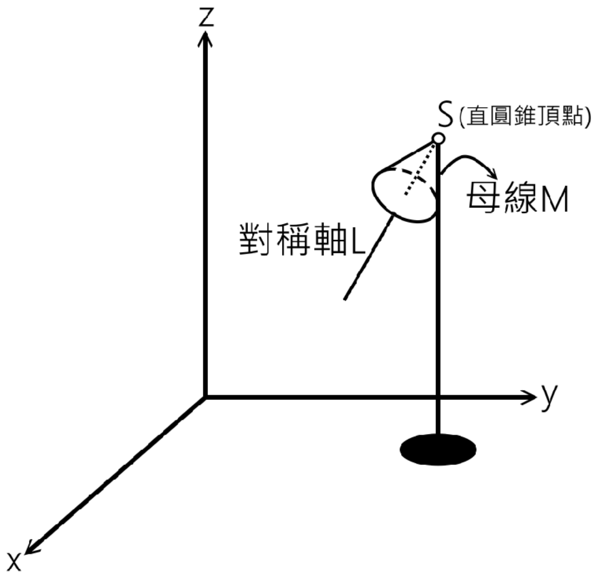
6. 空間中有一四面體 $ABCD$ ，已知 $\overline{AB}=\sqrt{30},\ \overline{AC}=15,\ \overline{AD}=9$ ，且 $\angle BAC=60^\circ,\angle CAD=30^\circ$ 。當 $\sin\angle BAD=t$ 時，四面體 $ABCD$ 體積有最大值。試求 t 值。

7. 設矩陣 $M=\begin{bmatrix}\frac{21}{29} & \frac{20}{29}\\ \frac{20}{29} & -\frac{21}{29}\end{bmatrix}$，已知橢圓 Γ_1: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{2}=1$ 經 M 線性變換後得到橢圓 Γ_2，將橢圓 Γ_2 對直線 $y=kx$ 鏡射後，得到橢圓 Γ_1，試求：

(1) 橢圓 Γ_1 與橢圓 Γ_2 在第一象限的交點坐標。

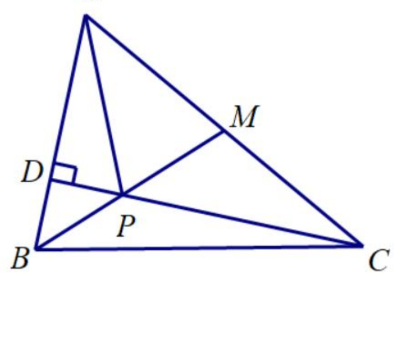
(2) 實數 k 的值。

8. 某房間內設有一盞聚光燈，其照射的光線為直圓錐狀。為描述其空間幾何關係，建立如右圖所示的空間坐標系。已知光源 $S(2\sqrt{6},3\sqrt{6},12)$ 分別沿著對稱軸 L 的方向向量 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\sqrt{3})$ 以及其中一條母線 M 的方向向量 $(0,\ 0,\ -1)$ 向地面 $z=0$ 照射，試問：此聚光燈照射在牆面（即平面 $y=0$）上的光線邊緣，為哪一種圓錐曲線圖形的一部分？該圓錐曲線在牆面上的頂點坐標為何？



9. $f(x)$ 為一實係數三次多項式函數，已知其反曲點為 $(-1,\ 84)$，且 $\lim_{h\to 0}\frac{f(-1-h)-f(-1)}{2h}=43$，又已知存在 $t>0$，使得對所有 $a,b\in R$，若 $b>a>-1$，則有 $\int_0^t f(x)dx\le\int_a^b f(x)dx$。試求 t 值。

10. 如右圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}^2=\overline{BC}^2+\frac{1}{2}\overline{AB}^2$，$\triangle ABC$ 之中線 $\overline{BM}$ 與 $\overline{AB}$ 上的高 $\overline{CD}$ 相交於點 P。若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對 $(x，y)=$？



11. 棒球經典賽預賽某 5 支隊伍在同一組，預賽同一組的任兩隊之間都要比賽一場分出勝負。已知這 5 支隊伍實力相當，每一場勝負機率皆為$\frac{1}{2}$。則預賽所有賽程完成之後，5 支隊伍戰績相同(都 2 勝 2 負)的機率為何？

12. 實數 x、y 滿足$\begin{cases} x+y=z-1 \\ xy=z^2-7z+14 \end{cases}$，$x^2+y^2-4x-4y$ 有最大值 M、最小值 m，試求數對(M, m)＝？

13. 某公司 A 部門有 20 人，B 部門有 80 人，現欲重新整併編排如下：從 A、B 兩部門分別選取若干人組成 C 部門，剩餘的人則組成 D 部門。在 C 部門中，至少要有兩名成員來自 A 部門，且來自 B 部門之人數恰好比來自 A 部門的人數多兩人。在此原則之下,所有可能的選取編排結果有 x 種，則 x 被 41 除的餘數為何？

14. 屏東女中舉辦 100 週年校慶抽號碼送獎品活動，規則如下：

學務處準備編號 1、2、3、...、9 的牌卡 11 張，其中編號 8 的牌卡有 3 張，其它編號的牌卡均只有 1 張。從這 11 張牌隨機抽出四張且抽出後不放回，依抽出順序由左而右排列成一個四位數。若排成的四位數滿足下列任一個條件，就可獲得獎品：

（1）此四位數大於 8800

（2）此四位數含有三個數字 8

例如：若抽出四張牌編號依序為 8、8、1、6，則此四位數為 8816，可獲得獎品。依上述規則，請問共有多少個抽出排成的四位數可獲得獎品？

15. $\mathrm{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，$\mathrm{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，設 $\mathrm{P}^n=a_n\mathrm{P}+b_n\mathrm{I}$，$\forall n\in N$，求 a_n 之一般式。

16. 數列〈b_n〉滿足 $b_1=6$，$b_2=96$，$b_{n+2}=\dfrac{(b_{n+1})^3}{2(b_n)^2}-2b_{n+1}(b_n)^2$，$\forall n\in N$。設 $p=(\dfrac{b_{101}}{2b_{100}})^2+(b_{100})^2$，則 $\log(\log p)$ 之值最接近哪個整數？

二、計算證明題(共 15 分)

1. $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 為空間向量，其中 $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$。

   證明：若 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$ 且 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$，則 $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$。　(6 分)

2. 甲、乙兩人參選形象大使，由 n 位委員不記名投票，每人都投了一票，且無人投廢票，開票採一一唱票方式，假設開票過程中任何時刻甲的得票數皆不低於乙的得票數，直至開票完成。設所有可能的開票過程有 a_n 種情形，例如：$a_2=2$ (甲甲、甲乙，兩種可能過程)；$a_3=3$ (甲甲甲、甲甲乙、甲乙甲，三種可能過程)。

   (提示(Catalan number C_m)：若甲乙各得 m 票，且在開票過程中，任何時刻甲的累計得票數皆不低於乙，則滿足此條件的開票順序共有 $C_m=\dfrac{1}{m+1}C_m^{2m}=C_m^{2m}-C_{m+1}^{2m}$ 種。)

   (1) 求 $a_5=$？　(3 分)

   (2) 請推證出 a_n 的一般表達式。　(6 分)

國立屏東女中114年教師甄試數學科答案

一、填充題(每格5分，共85分)

1. $2^{\frac{1}{3}}-1$	2. 54
3. $\frac{2}{7}$	4. $\frac{1}{3}$
5. $M=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6}\end{bmatrix}$ **(送分)**	6. $\frac{\sqrt{13}}{4}$
7.(1) $(\frac{10}{3},\ \frac{4}{3})$	7.(2) $\frac{2}{5}\ or\ -\frac{5}{2}$
8. 圓錐曲線：雙曲線 頂點坐標：$(-\sqrt{6}+\frac{18}{7}\sqrt{14},\ 0,\ 30-\frac{36}{7}\sqrt{21})$ (全對才給分)	9. 5
10. $(\frac{3}{5},\ \frac{1}{5})$	11. $\frac{3}{128}$
12. $(-7,\ -8)$	13. 36
14. 501	15. $a_n=\frac{2^n-(-1)^n}{3}$
16. 30	

二、計算證明題(共15分)

1. 略

2. (1) 10　　(2) $C^{n}_{[\frac{n}{2}]}$