

By Buji

國立嘉義高級中學 114 學年度第一學期第 2 次教師甄選-數學科試題

一、填充題：共 15 題，每題 6 分，合計 90 分

1. 已知 $0 \leq x \leq 4\pi$ ，求方程式 $4\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - 4\cos x = 1$ 之所有實根總和為 $\frac{20}{3}\pi$ 。

$$4\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - 4\cos x = 1$$

$$\Rightarrow 4\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \pi + 2\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{20}{3}\pi$$

2. 設圓 $C: (x-6)^2 + (y-4)^2 = 4$ ，今有一質點自點 $P(2,2)$ 發射，射向 x 軸上之 Q 點後反射恰可碰觸到圓 C ，則 Q 點在 x 軸上所有可能的位置所構成的區間長度為 $\sqrt{3}$ 。

$$\Rightarrow P(2,2) \Rightarrow y+2=m(x-2) \Rightarrow mx-y-2m+2=0$$

$$\Rightarrow \frac{|4m-6|}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \Rightarrow m = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} \text{① } \frac{6+2\sqrt{3}}{3}x - y - \frac{18+4\sqrt{3}}{3} = 0 \\ \text{② } \frac{6-2\sqrt{3}}{3}x - y - \frac{18-4\sqrt{3}}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{所求 } \sqrt{3}$$

3. $x \in \mathbb{R}$ ， $[x]$ 表高斯符號，若 $[x] + [4x] = 6$ ，則 x 的範圍為 $\frac{5}{4} \leq x < \frac{3}{2}$ 。

$$\text{① } 1 \leq x < \frac{5}{4} \Rightarrow \text{不合}$$

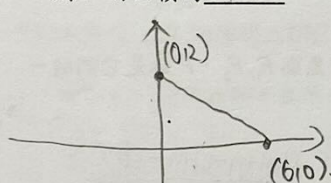
$$\text{④ } \frac{7}{4} \leq x < 2 \Rightarrow \text{不合}$$

$$\frac{5}{4} \leq x < \frac{3}{2}$$

$$\text{② } \frac{5}{4} \leq x < \frac{6}{4} \Rightarrow \text{合}$$

$$\text{③ } \frac{6}{4} \leq x < \frac{7}{4} \Rightarrow \text{不合}$$

4. 方程式 $|x| + 3|y| = 6$ 的圖形為 Γ ，則將 Γ 上任一點 (a,b) 變換成 $(a',b') = (5a+2b-1, a-b+4)$ 得圖形 Γ' ，則 Γ' 的面積為 168。



$$\Rightarrow 2 \times 6 \times \frac{1}{2} \times 4 = 24$$

$$\Rightarrow 24 \times \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 168$$

5. 小明有 5 隻牛、4 隻豬及 7 隻馬玩偶，則她將這 16 隻不同的玩偶配對，每對的動物種類不同，則共有 100800 種配對方法。

設牛為 $\bigcirc$

豬為 $\times$

馬為 $\triangle$

$$\Rightarrow \triangle \triangle \triangle \triangle \times \times \times \times \Rightarrow C_1^4 C_4^7 \times 5! \times 3! = 100800$$

$$\bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \triangle \triangle \triangle$$

6. 已知平面 E 包含直線 $\begin{cases} x=1 \\ y+z=3 \end{cases}$ ，且兩直線 $\frac{x-9}{2} = \frac{y+10}{1} = \frac{z-11}{-1}$ 及 $\frac{x-9}{-2} = \frac{y+10}{2} = \frac{z-11}{1}$ 在平面 E 上的投影恰為一直線，則平面 E 的方程式為 $-2x+y+z=1$ 。

影恰為一直線，則平面 E 的方程式為 $-2x+y+z=1$

$$\text{① } (1,0,0) \times (0,1,1) = (0, -1, 1)$$

$$\text{② } (2,1,-1) \times (-2,2,1) = (3,0,6) \parallel (1,0,2)$$

$$\text{③ } (0,-1,1) \times (1,0,2) = (-2,1,1) \Rightarrow -2x+y+z=1$$

7. 若 $a, b \in \mathbb{N}$, 則有 10000 組數對 (a, b) 滿足 $\sqrt{\log a} - \sqrt{\log b} + \log \sqrt{a} + \log \sqrt{b} \leq 0$ 。

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{\log a} + 1)^2 + (\sqrt{\log b} - 1)^2 \leq 2$$

$$\textcircled{1} \text{ 若 } \sqrt{\log a} = 0 \Rightarrow a = 1$$

$\textcircled{2} \text{ 若 } a = 2 \Rightarrow \text{不成立}$

$$\Rightarrow (\sqrt{\log b} - 1)^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq \log b \leq 10000$$

(鳥蛋提快解法)

8. 若 $f(x)$ 為一實係數多項函數, 已 $\int_0^1 f(x)f'(x)dx = 1$ 且 $\int_0^1 (f(x))^3 f'(x)dx = 2$, 則 $\int_0^1 (f(x))^5 f'(x)dx$ 之值為 $\frac{13}{3}$ 。

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^1 f(x) df(x) &= 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{2} (f(1)^2 - f(0)^2) \right] = 1 \Rightarrow f(1)^2 = 2, f(0)^2 = 0 \\ \int_0^1 (f(x))^3 df(x) &= 2 \Rightarrow \left[\frac{1}{4} (f(1)^4 - f(0)^4) \right] = 2 \Rightarrow f(1)^4 = 8, f(0)^4 = 0 \\ \Rightarrow \int_0^1 (f(x))^5 df(x) &= \frac{1}{6} (f(1)^6 - f(0)^6) = \frac{1}{6} (2^3 - 0) = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

9. 設 A, B 為非零二階方陣, I 表示二階的單位矩陣, O 表二階的零矩陣, 滿足 $\begin{cases} A = 2I + B \\ AB = O \end{cases}$, 若 $(A+I)^8 = kA + I$,

其中 k 為實數, 則 $k = \underline{3200}$ 。

$$\begin{cases} A = 2I + B \\ AB = O \end{cases} \Rightarrow A^2 = 2A \Rightarrow A^n = 2^{n-1}A$$

$$\Rightarrow (A+I)^8 = 3200A + I$$

10. 已知橢圓 $\frac{x^2}{m} + y^2 = 1$ ($m > 1$) 和雙曲線 $\frac{x^2}{n} - \frac{y^2}{3} = 1$ ($n > 0$) 有相同的兩個焦點 F_1, F_2 , P 點是它們的一

個交點, 則 $\tan \angle F_1 P F_2 = \underline{-\sqrt{3}}$ 。

$$\textcircled{1} a = \sqrt{m}, b = 1 \Rightarrow c = \sqrt{m-1} \Rightarrow \begin{cases} \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2\sqrt{m} \\ \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2\sqrt{n} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} a = \sqrt{n}, b = \sqrt{3} \Rightarrow c = \sqrt{n+3}$$

$$\Rightarrow \cos \angle F_1 P F_2 = \frac{m+n+n-4c^2}{2cm-n}$$

$$= \frac{8+4n-4n-12}{8}$$

$$= -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan \angle F_1 P F_2 = -\sqrt{3}$$

11. 若 $\max\{p, q\}$ 代表 p, q 中較大的數, $\min\{p, q\}$ 代表 p, q 中較小的數, 則方程式:

$$\frac{1}{3} \max\{a, b\} + \frac{2}{3} \min\{a, b\} = 2025$$

$$\frac{1}{3} \max\{b, c\} + \frac{2}{3} \min\{b, c\} = 2026 \text{ 的解 } (a, b, c) = \left(2026, \frac{4049}{2}, 2029 \right)$$

$$\frac{1}{3} \max\{c, a\} + \frac{2}{3} \min\{c, a\} = 2027$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b = 2025 \\ \frac{1}{3}c + \frac{2}{3}b = 2026 \\ \frac{1}{3}c + \frac{2}{3}a = 2027 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a, b, c) = \left(2026, \frac{4049}{2}, 2029 \right)$$

$$\frac{1}{3}c + \frac{2}{3}a = 2027$$

12. 若 S 是 $\{1, 2, 3, 4, \dots, 2025\}$ 的一個子集，且 S 中任兩個元素皆非相差 2，也非相差 7，則 S 個數的最大值為 900。

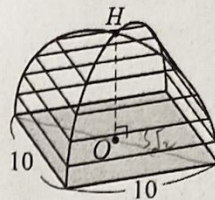
觀察規律 1, 2, 5, 6, 10, 11, 14, 15, ...

00XX00XXX

$\Rightarrow$ 9個數為一個循環，且裡面有4個數被取。

$$\Rightarrow \frac{2025}{9} = 225 \Rightarrow 225 \times 4 = 900$$

13. 右圖是動物園新建立的大型鳥籠，其建立方式如下：在一個邊長為 10 公尺的正方形平臺上，立起兩支以底面對角線為直徑的半圓形鋼架，落腳點就在平臺的四個頂點上；而半圓形鋼架的交點 H 在底面（邊長 10 公尺的正方形）中心點 O 的正上方，即線段 OH 垂直底面；然後在鋼架上張起鐵絲網，使得每個平行底面的鐵絲網都是頂點落在鋼架上的正方形。此鳥籠的容積為 $\frac{1000}{3}$ 立方公尺。



$$r = 5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow (5\sqrt{2}x)^2 = 2(x^2 + y^2) \Rightarrow \int_0^{5\sqrt{2}} 2(50 - y^2) dy = \frac{1000}{3}\sqrt{2}$$

14. 已知實數 x, y 滿足 $\frac{1}{x^2} + \frac{8}{y^2} = 1$ ，則 $(x-1)^2 + (y-8)^2$ 的最小值為 16。

$$\text{設 } (x-1)^2 + (y-8)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + r \cos \theta \\ y = 8 + r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{(1+r \cos \theta)^2} + \frac{8}{(8+r \sin \theta)^2} = 1 \Rightarrow 8 + r \sin \theta + 8 + 8r \cos \theta = 8 + r^2 \cos^2 \theta + 8r \cos \theta + r \sin \theta$$

$$\Rightarrow 16 = r^2 \sin^2 \theta \Rightarrow r \text{ 最小值 } 4$$

15. 兩圓 O_1, O_2 均通過 $\triangle ABC$ 的頂點 A ，且分別與 $\overline{BC}$ 邊相切於 B 點及 C 點，若圓 O_1 、圓 O_2 的面積分別為 m 和 n ，則以 m 和 n 表示 $\triangle ABC$ 的外接圓面積為 $\sqrt{mn}$ 。

$$\text{設圓 } O_1 \text{ 半徑 } R_1 \Rightarrow R_1^2 \pi = m$$

$$\text{圓 } O_2 \text{ 半徑 } R_2 \Rightarrow R_2^2 \pi = n$$

$$\frac{c}{\sin \theta_1} = 2R_1$$

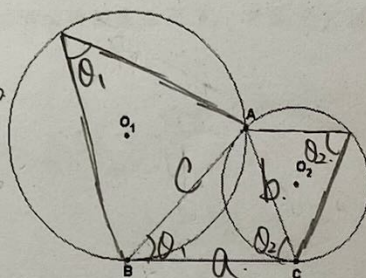
$$\frac{b}{\sin \theta_1} = 2R_3$$

$$\Rightarrow 4R_3^2 = 4R_1 R_2$$

$$\frac{b}{\sin \theta_2} = 2R_2$$

$$\frac{c}{\sin \theta_2} = 2R_3$$

$$\Rightarrow R_3^2 \pi = R_1 R_2 \pi = \sqrt{mn}$$



二、計算題(10分，需有計算過程，否則不予計分)

四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ ， $\overline{BC} = 4$ ， $\overline{CD} = 3$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，點 P 在 $\overline{AB}$ 上，點 Q 在 $\overline{CD}$ 上，

若 $\overline{PQ}$ 平分四邊形 $ABCD$ 的面積，則 $\overline{PQ}$ 的最小值為何？

$$\Rightarrow \text{ABCD 面積} = 8 - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \sin 45^\circ = 7$$

$$\text{設 } \overline{EP} = x, \overline{EQ} = y \Rightarrow \triangle EPQ = \frac{1}{2} xy \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} xy$$

$$\Rightarrow \text{APQ 面積} = \frac{\sqrt{2}}{4} xy - 1 = \frac{7}{2} \Rightarrow xy = 9\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \overline{PQ}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 45^\circ = x^2 + y^2 - 18 \geq 18\sqrt{2} - 18$$

$$\Rightarrow \overline{PQ} \geq 3\sqrt{2} - 2$$

