

國立嘉義高級中學 114 學年度第一學期第 2 次教師甄選-數學科試題

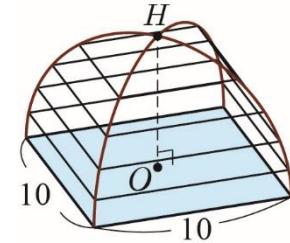
一、填充題：共 15 題，每題 6 分，合計 90 分

1. 已知 $0 \leq x \leq 4\pi$ ，求方程式 $4\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - 4\cos x = 1$ 之所有實根總和為 _____。
2. 設圓 $C: (x-6)^2 + (y-4)^2 = 4$ ，今有一質點自點 $P(2,2)$ 發射，射向 x 軸上之 Q 點後反射恰可碰觸到圓 C ，則 Q 點在 x 軸上所有可能的位置所構成的區間長度為 _____。
3. $x \in R$ ， $[x]$ 表高斯符號，若 $[x] + [4x] = 6$ ，則 x 的範圍為 _____。
4. 方程式 $|x| + 3|y| = 6$ 的圖形為 Γ ，則將 Γ 上任一點 (a,b) 變換成 $(a',b') = (5a+2b-1, a-b+4)$ 得圖形 Γ' ，則 Γ' 的面積為 _____。
5. 小明有 5 隻牛、4 隻豬及 7 隻馬玩偶，則她將這 16 隻不同的玩偶配對，每對的動物種類不同，則共有 _____ 種配對方法。
6. 已知平面 E 包含直線 $\begin{cases} x=1 \\ y+z=3 \end{cases}$ ，且兩直線 $\frac{x-9}{2} = \frac{y+10}{1} = \frac{z-11}{-1}$ 及 $\frac{x-9}{-2} = \frac{y+10}{2} = \frac{z-11}{1}$ 在平面 E 上的投影恰為一直線，則平面 E 的方程式為 _____。

7. 若 $a, b \in \mathbb{N}$ ，則有 _____ 組數對 (a, b) 滿足 $\sqrt{\log a} - \sqrt{\log b} + \log \sqrt{a} + \log \sqrt{b} \leq 0$ 。
8. 若 $f(x)$ 為一實係數多項函數，已 $\int_0^1 f(x)f'(x)dx = 1$ 且 $\int_0^1 (f(x))^3 f'(x)dx = 2$ ，則 $\int_0^1 (f(x))^5 f'(x)dx$ 之值為 _____。
9. 設 A, B 為非零二階方陣， I 表示二階的單位矩陣， O 表二階的零矩陣，滿足 $\begin{cases} A = 2I + B, \text{若 } (A + I)^8 = kA + I \\ AB = O \end{cases}$ ，其中 k 為實數，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
10. 已知橢圓 $\frac{x^2}{m} + y^2 = 1$ ($m > 1$) 和雙曲線 $\frac{x^2}{n} - \frac{y^2}{3} = 1$ ($n > 0$) 有相同的兩個焦點 F_1, F_2 ， P 點是它們的一個交點，則 $\tan \angle F_1 P F_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
11. 若 $\max\{p, q\}$ 代表 p, q 中較大的數， $\min\{p, q\}$ 代表 p, q 中較小的數，則方程式：
- $$\begin{cases} \frac{1}{3} \max\{a, b\} + \frac{2}{3} \min\{a, b\} = 2025 \\ \frac{1}{3} \max\{b, c\} + \frac{2}{3} \min\{b, c\} = 2026 \text{ 的解 } (a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}} \\ \frac{1}{3} \max\{c, a\} + \frac{2}{3} \min\{c, a\} = 2027 \end{cases}$$

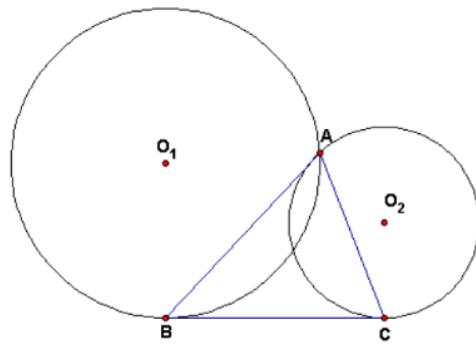
12. 若 S 是 $\{1, 2, 3, 4, \dots, 2025\}$ 的一個子集，且 S 中任兩個元素皆非相差 2，也非相差 7，則 S 個數的最大值為_____。

13. 右圖是動物園新建立的大型鳥籠，其建立方式如下：在一個邊長為 10 公尺的正方形平臺上，立起兩支以底面對角線為直徑的半圓形鋼架，落腳點就在平臺的四個頂點上；而半圓形鋼架的交點 H 在底面（邊長 10 公尺的正方形）中心點 O 的正上方，即線段 OH 垂直底面；然後在鋼架上張起鐵絲網，使得每個平行底面的鐵絲網都是頂點落在鋼架上的正方形。此鳥籠的容積為_____立方公尺。



14. 已知實數 x, y 滿足 $\frac{1}{x} + \frac{8}{y} = 1$ ，則 $(x-1)^2 + (y-8)^2$ 的最小值為_____。

15. 兩圓 O_1 、 O_2 均通過 $\triangle ABC$ 的頂點 A ，且分別與 \overline{BC} 邊相切於 B 點及 C 點，若圓 O_1 、圓 O_2 的面積分別為 m 和 n ，則以 m 和 n 表示 $\triangle ABC$ 的外接圓面積為_____。



二、計算題(10 分，需有計算過程，否則不予計分)

四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ ， $\overline{BC} = 4$ ， $\overline{CD} = 3$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，點 P 在 \overline{AB} 上，點 Q 在 \overline{CD} 上，若 \overline{PQ} 平分四邊形 $ABCD$ 的面積，則 \overline{PQ} 的最小值為何？