臺北市立內湖高級中學
14 學年度第 3 次正式教師甄選$\boxed{\text{數學科}}$初選筆試試題卷

一、填充題（每題 5 分）

1. 設 n 為正整數，在坐標平面上，$x^{2n}+y^{2n}=1$ 的圖形相距最遠的兩點距離為 d_n，則 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=$________。

2. 方程式 $\sin|2x|=|\cos(2x)|$ 在區間 $[-12\pi,13\pi]$ 的所有解之和為________。

3. 設 $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-2x+4}$，當 $x=a$ 時，$f(x)$ 有最小值 b，則數對 $(a,b)=$________。

4. 複係數方程式 $x^3+bx^2+cx+8i=0$ 的三根成等比數列（公比不一定是實數），則 $\dfrac{c}{b}$ 所有可能的值為________。

5. 若 $10^n\cdot\left(C_1^{2025}-3C_3^{2025}+5C_5^{2025}-7C_7^{2025}+9C_9^{2025}-\cdots-2023C_{2023}^{2025}+2025C_{2025}^{2025}\right)$ 為整數，則整數 n 的最小值為________。

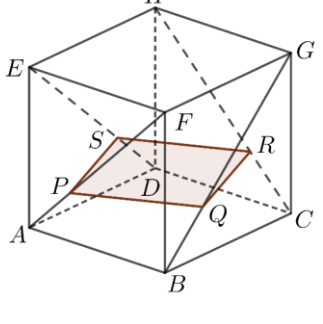
6. 若依照數字排列的規律將下列表格填滿，則第 11 列中所有數字的總和為________。

	第 1 行	第 2 行	第 3 行	⋯			第 20 行
第 1 列	1	2	4	7	11	⋯	
第 2 列	3	5	8	12			
第 3 列	6	9	13				
⋮	10	14		⋱			
	15						
	⋮						
第 20 列							

7. 擲 4 顆骰子，在點數和為 19 的條件下，至少有一顆點數為 6 點的機率為________。

8. 矩陣 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 2 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 經矩陣列運算後可得 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$，則方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=12 \\ a_2x+b_2y+c_2z=15 \\ a_3x+b_3y+c_3z=18 \end{cases}$ 的解 $(x,y,z)=$________。

9. 如圖，$ABCD\text{-}EFGH$ 為一邊長為 1 的正立方體。P、Q、R、S 四動點分別在 $\overline{AF}$、$\overline{BG}$、$\overline{CH}$、$\overline{DE}$ 上，且四邊形 $PQRS$ 平行正方體的底面 $ABCD$，則當 P 點從 A 點沿著 $\overline{AF}$ 移動到 F 點時，四邊形 $PQRS$ 的軌跡形成的立體圖形體積為________。



10. 動點 P 一開始在數線的原點，今擲一枚公正的骰子，若出現點數 1，則 P 點往右跳一單位，若出現其他點數，則 P 點往左跳一單位，當 P 點跳到 2 或 -2 時結束，則 P 點最後停在 2 的機率為________。

11. 在坐標空間中，有一平面 $E: x-y+z=3$ 和一射線 $L:\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases}, t\ge 0$，若一半徑為 1 的球與平面 E 相切，也與射線 L 相切，則此球的球心軌跡所圍成的區域面積為________。

12. 將 1 到 10 的 10 個正整數分成 A、B 兩組，每組各 5 個數，已知 A 組的算術平均數恰等於 B 組的中位數減 1，共有________種分法。

臺北市立內湖高級中學
14 學年度第 3 次正式教師甄選數學科初選筆試試題卷

二、計算證明題（每題 8 分）

1. 在坐標平面上，設點 $P(4,4)$、$Q(10,-2)$，已知直線 L 通過原點 $O(0,0)$，且 A、B、C、D 為直線 L 上相異四點，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$，$\angle PAB=\angle PBQ=\angle PCQ=\angle CDQ=90^\circ$，則直線 L 的斜率為何？

2. 在坐標平面上，已知 P、Q 兩點都在 $y=\left[2^{|x|}-2\right]$ 的圖形上，其中[ ]為高斯函數，且 P 點在此圖形的最低點，Q 點的 y 坐標為 1，且則直線 PQ 的斜率 m 的範圍為何？

3. 設 S_n 是首項為 1，公比為 2 的等比級數，設 a_n 為 S_n 的十位數，b_n 為 S_n 的個位數，試證：無限小數 $0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4\cdots$ 為有理數。

三、大考試題講解（每題 8 分）

1. 112 年分科測驗數學甲的單選第 3 題的題目如下：

> 3. 試問極限
>
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}\left(\sqrt{4n^2+9\times1^2}+\sqrt{4n^2+9\times2^2}+\cdots+\sqrt{4n^2+9\times(n-1)^2}\right)$$
>
> 的值可用下列哪一個定積分表示？
>
> (1) $\int_0^3\sqrt{1+x^2}\,dx$　　(2) $\int_0^3\sqrt{1+9x^2}\,dx$　　(3) $\int_0^3\sqrt{4+x^2}\,dx$
>
> (4) $\int_0^3\sqrt{4+9x^2}\,dx$　　(5) $\int_0^3\sqrt{4x^2+9}\,dx$

(1) 試寫出詳細的解題步驟，並加以說明如何引導學生這一題的解法。(3 分)

(2) 若延伸此題如下，試寫出詳細的解題步驟。(5 分)

> 設 $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}\left(\sqrt{4n^2+9\times1^2}+\sqrt{4n^2+9\times2^2}+\cdots+\sqrt{4n^2+9\times(n-1)^2}\right)=\int_0^2 f(x)dx$，試寫出 $f(x)$。

2. 112 年學測數學 B 的選填第 17 題的題目如下：

> 17. 考慮所有只用 0, 1, 2 三種數字組成的序列，序列長度 n 是指該序列由 n 個數字組成（可重複出現）。令 $a(n)$ 為在所有長度 n 的序列中連續兩個零（即 00）出現的次數總和。
>
> 例如長度 3 的序列中含有連續兩個零的有 000，001，002，100，200，其中 000 貢獻 2 次 00，其餘各貢獻 1 次 00，故 $a(3)=6$。則 $a(5)$ 的值為
>
> 17-1 17-2 17-3 。

試寫出兩種不同的解法，並分別指出對應高中數學哪一冊的單元或概念。(每一種解法 4 分)

一、填充題（每題 5 分）

1. $2\sqrt{2}$	2. $\frac{49\pi}{2}$	3. $(\frac{2}{3},\sqrt{7})$	4. $-\sqrt{3}+i$ 或 $-2i$ 或 $\sqrt{3}+i$
5. -2	6. 4165	7. $\frac{13}{14}$	8. $(6,23,-\frac{9}{2})$
9. $\frac{2}{3}$	10. $\frac{1}{26}$	11. $\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi$	12. 10