

國立嘉義女子高級中學 114 學年度第 1 次教師甄選初試試題卷

科目：數學科

時間：114/5/27(二)19:00~20:30 計 90 分鐘。

說明：1. 本試題卷共有 3 張 6 頁計有 2 大題試題。答案請書寫於答案紙(一張兩面)。

2. 請核對本試題卷右上角准考證號碼是否正確。

3. 可利用試題卷空白處書寫或計算。

4. 試題卷須連同答案卷一併繳回，請勿書寫姓名。

作答說明：所有的答案請依題號填寫於答案卷上，答案卷請用黑色或藍色原子筆作答，否則不予計分。禁用計算機。

試題與答案卷共 7 頁。

一、填充題(計 13 格，每格 6 分，共 78 分)：

1. 求 $43^{100} - 43^2$ 除以 $43^3 - 43^2 + 43$ 的餘數為 75609。

$$x^3 + 1 = 0$$

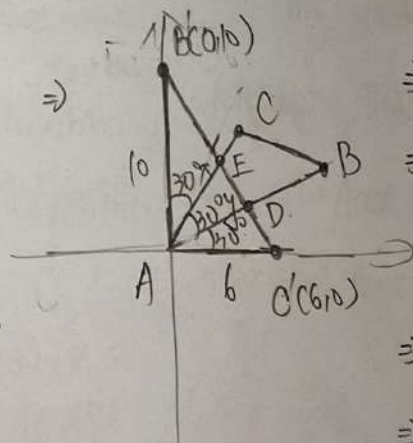
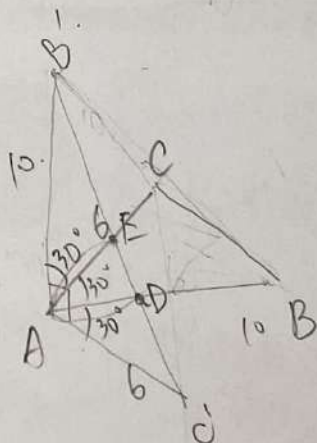
$$\Rightarrow x^3 = -1$$

$$\Rightarrow -x - x^2 \text{ 為簡式}$$

$$\Rightarrow -43 - 43^2 + 43^3 - 43^2 + 43 = 75609$$

2. $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{AC} = 6$ ，若 D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上的動點。當 $\overline{BE} + \overline{DE} + \overline{CD}$ 有最小值時，求此

時的長度比 $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} =$ 。



$$\frac{1}{2} \times 10 \times x \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times 6 \times x \sin 60^\circ = 30$$

$$\Rightarrow 5x + 3\sqrt{3}x = 60$$

$$\Rightarrow (5 + 3\sqrt{3})x = 60$$

$$\frac{1}{2} \times 10 \times y \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times y \times 6 \sin 30^\circ = 30$$

$$\Rightarrow 5\sqrt{3}y + 3y = 60$$

$$\Rightarrow y = \frac{60}{5\sqrt{3} + 3}$$

$$\Rightarrow \frac{60}{5\sqrt{3} + 3} \times \frac{5 + 3\sqrt{3}}{60} = \frac{5 + 3\sqrt{3}}{5\sqrt{3} + 3} = \frac{8\sqrt{3} + 15}{33}$$

國立嘉義女子高級中學 114 學年度第 1 次教師甄選初試試題卷

科目：數學科

時間：114/5/27(二)19:00~20:30 計 90 分鐘。

說明：1. 本試題卷共有 3 張 6 頁計有 二大題試題。答案請書寫於答案紙(一張兩面)。

2. 請核對本試題卷右上角准考證號碼是否正確。

3. 可利用試題卷空白處書寫或計算。

4. 試題卷須連同答案卷一併繳回，請勿書寫姓名。

作答說明：所有的答案請依題號填寫於答案卷上，答案卷請用黑色或藍色原子筆作答，否則不予計分。禁用計算機。

試題與答案卷共 7 頁。

一、填充題(計 13 格，每格 6 分，共 78 分)：

1. 求 $43^{100} - 43^2$ 除以 $43^3 - 43^2 + 43$ 的餘數為 75609。

$$x^3 + 1 = 0$$

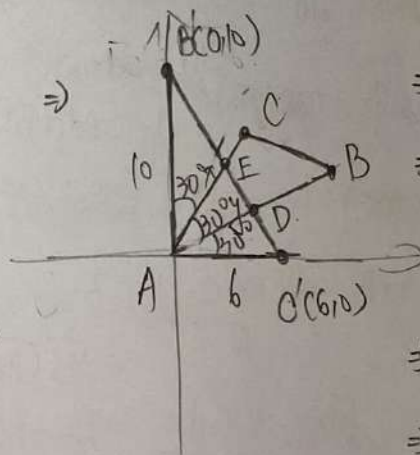
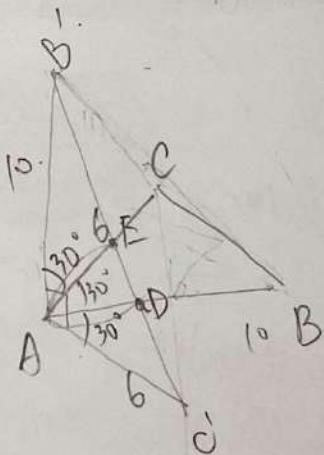
$$\Rightarrow x^3 = -1$$

$$\Rightarrow -x - x^2 \text{ 為簡式}$$

$$\Rightarrow -43 - 43^2 + 43^3 - 43^2 + 43 = 75609$$

2. $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{AC} = 6$ ，若 D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上的動點。當 $\overline{BE} + \overline{DE} + \overline{CD}$ 有最小值時，求此

時的長度比 $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} =$ 。



$$\frac{1}{2} \times 10 \times x \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times 6 \times x \sin 60^\circ = 30$$

$$\Rightarrow 5x + 3\sqrt{3}x = 60$$

$$\Rightarrow (5 + 3\sqrt{3})x = 60$$

$$\frac{1}{2} \times 10 \times y \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times y \times 6 \sin 30^\circ = 30$$

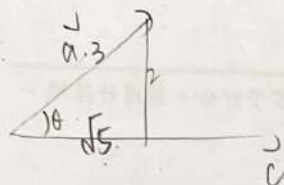
$$\Rightarrow 5\sqrt{3}y + 3y = 60$$

$$\Rightarrow y = \frac{60}{5\sqrt{3} + 3}$$

$$\Rightarrow \frac{60}{5\sqrt{3} + 3} \times \frac{5 + 3\sqrt{3}}{60} = \frac{5 + 3\sqrt{3}}{5\sqrt{3} + 3} = \frac{8\sqrt{3} + 15}{33}$$

3. 平面上有三個向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ ，滿足 $\frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{1}{2}$ 且 $|\vec{a}|=3$ ， $|\vec{b}|=2$ ，已知 $\vec{a}$ 在 $\vec{c}$ 的正射影長度為 $\sqrt{5}$ ，

求 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 的正射影長度為 $\frac{\sqrt{11}+5}{4}$ 。



$$\frac{|\vec{b}| |\vec{c}| \cos \phi}{|\vec{a}| |\vec{c}| \cos \theta} = \frac{2 \cos \phi}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \phi = \frac{\sqrt{5}}{4}, \sin \theta = \frac{2}{3}, \sin \phi = \frac{\sqrt{11}}{4}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta + \phi) = \frac{5}{12} - \frac{2\sqrt{11}}{12} \Rightarrow \frac{2\sqrt{11}-5}{4}$$

$$\cos(\phi - \theta) = \frac{5}{12} + \frac{2\sqrt{11}}{12} \Rightarrow \frac{5+2\sqrt{11}}{4}$$



4. 若 $\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{21} \\ 0 & \frac{22}{21} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{bmatrix}$ ， $n \in N$ ，則當 n 的取值最少為 15 時， c_n 開始會大於 d_n 。

($\log 2 \approx 0.301$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 7 \approx 0.8451$ ， $\log 11 \approx 1.0414$)

$$\text{設 } A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{21} \\ 0 & \frac{22}{21} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_I + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{21} \\ 0 & \frac{1}{21} \end{bmatrix}}_B$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{21} \\ 0 & \frac{1}{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{21} \\ 0 & \frac{1}{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{21^2} \\ 0 & \frac{1}{21^2} \end{bmatrix}$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{21^2} \\ 0 & \frac{1}{21^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{21} \\ 0 & \frac{1}{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{21^3} \\ 0 & \frac{1}{21^3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = (I+B)^n$$

$$= C_0 I + C_1 B + C_2 B^2 + \dots + C_n B^n$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & C_1 \frac{2}{21} + C_2 \frac{2}{21^2} + \dots + C_n \frac{2}{21^n} \\ 0 & C_1 \frac{1}{21} + C_2 \frac{1}{21^2} + \dots + C_n \frac{1}{21^n} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C_n - d_n > 0$$

$$\Rightarrow C_1 \frac{1}{21} + C_2 \frac{1}{21^2} + \dots + C_n \left(\frac{1}{21}\right)^n - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{21}\right)^n > 2 \Rightarrow n(\log 2 + \log 11 - \log 3 - \log 7) > \log 2$$

5. $\triangle ABC$ 中，已知 $\vec{AB} \cdot (\vec{AC} + 2\vec{BC}) = 0$ 且 $\cos C = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ，求 $\tan A : \tan B : \tan C =$ 1:2:3。

法 1.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -2\vec{AB} \cdot \vec{BC}$$

$$\Rightarrow |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos A = 2 |\vec{AB}| |\vec{BC}| \cos B$$

$$\Rightarrow 2R \sin B \cos A = 2 \cdot 2R \sin A \cos B$$

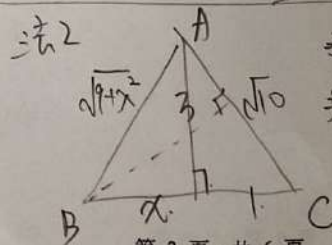
$$\Rightarrow \tan B = 2 \tan A$$

$$\cos C = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \tan C = 3$$

$$\tan C = -\tan(A+B) = \frac{-\tan A - \tan B}{1 - \tan A \tan B} = 3$$

$$\Rightarrow \tan A = 1 \text{ or } -\frac{1}{2} \text{ (不合, 會有兩解在 } \triangle ABC)$$

$$\Rightarrow \tan A = \tan B = \tan C = 1:2:3$$



第 2 頁，共 6 頁

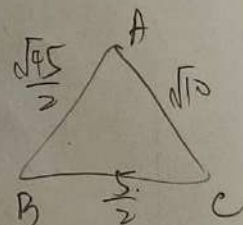
$$\Rightarrow \vec{AB} \cdot (\vec{BC} - \vec{BA} + 2\vec{BC}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{AB} \cdot 3\vec{BC} + |\vec{AB}|^2 = 0$$

$$\Rightarrow 9 + x^2 = 3x^2 + 3x$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} = 3 \text{ (不合)}$$

$$\Rightarrow n > 14$$



$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \tan A = \tan B = \tan C = 1:2:3$$

6. xy 平面上的動點 $P(a, b)$, $b > a > 1$, 若 c 為不等於 1 的正實數, 滿足 $2(\log_a c + \log_b c) = 9 \log_{ab} c$,

求 $\sqrt{16a^2 + (4b-1)^2} + \sqrt{(4a-6)^2 + (4b-11)^2}$ 的最小值為 12。

$$2\left(\frac{\log c}{\log a} + \frac{\log c}{\log b}\right) = 9 \frac{\log c}{\log ab} \Rightarrow (2\log a - \log b)(\log a - \log b^2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\log b + \log a}{\log a \log b} = \frac{9}{\log a + \log b} \Rightarrow \frac{a^2}{b} = 1 \Rightarrow a^2 = b \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x^2 = 4cy, c = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{2(x+y)}{xy} = \frac{9}{x+y}$$

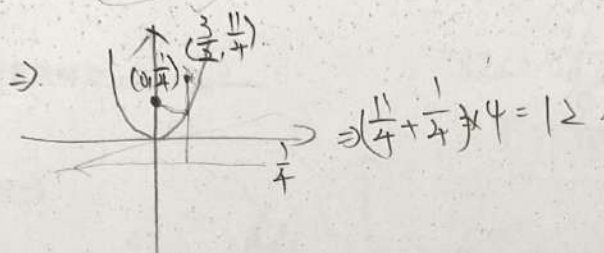
$$4\left(\sqrt{a^2 + (b - \frac{1}{4})^2} + \sqrt{(a - \frac{3}{2})^2 + (b - \frac{11}{4})^2}\right)$$

$$\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow 2(x+y)^2 = 9xy$$

$$\Rightarrow 2x^2 + y^2 - 5xy = 0$$

$$\Rightarrow (2x-y)(x-2y) = 0$$



7. 設實係數多項式 $y = f(x)$ 滿足 $f(x) = \int_1^x f(t) dt - x^4 - 4x^3 - x^2 + 9x + 116$, 且 $f(s) = 8$, $f(k) = 2$,

求 $s+k =$ -4。

$$f'(x) = f(x) - 4x^3 - 12x^2 - 2x + 9$$

$$\Rightarrow f(x) = 4x^3 + 12x^2 + 2x - 9 + f'(x)$$

$$\text{設 } f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

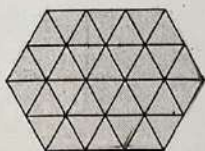
$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = 4x^3 + 12x^2 + 2x - 9 + 3ax^2 + 2bx + a$$

$$\Rightarrow a=4, b=24, c=50, d=41$$

$$\Rightarrow f(x) = 4x^3 + 24x^2 + 50x + 41$$

$$= 4(x+2)^3 + 2(x+2) + 5 \Rightarrow -2 \times 2 = -4$$

8. 下圖為正三角形所構成之圖形, 試求以這些線段共可以決定 153 個平行四邊形。



$$C_2^{24} - 4C_2^3 - 6C_2^4 - 6C_2^5 - C_2^6 = 153$$

9. 投擲一個特殊骰子(共六個面, 每面出現機率均等), 其中六個面點數分別為 1, 1, 2, 2, 3, 3, 試求連續投擲 9 次, 其點數的算術平均數之小數點後第一位數字為 1 的機率為 $\frac{4}{27}$ 。

$$\textcircled{1} \frac{10}{9} \Rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2) \Rightarrow C_1^9 = 9$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \frac{19}{9} &\Rightarrow (3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 1) \Rightarrow \frac{9!}{4!5!} = 126 \\ &\quad (3, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1) \Rightarrow \frac{9!}{4!2!3!} = 1260 \\ &\quad (3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1) \Rightarrow \frac{9!}{4!2!3!} = 1260 \\ &\quad (3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1) \Rightarrow \frac{9!}{2!6!} = 252 \\ &\quad (3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \Rightarrow \frac{9!}{8!} = 9 \end{aligned} \Rightarrow \frac{9 + 126 + 1260 + 1260 + 252 + 9}{3^9} = \frac{4}{27}$$

10. 在複數平面上, 若已知 $|z|=1$, 試求 $|z^2+z-6|$ 的最大值為 $\frac{35\sqrt{6}}{12}$ 。

$$\begin{aligned} &|z| \left| z - \frac{6}{z} + 1 \right| \\ &= \left| z - \frac{6}{z} + 1 \right| \\ &= |\cos\theta + i\sin\theta - 6\cos\theta + 6i\sin\theta + 1| \\ &= |(-5\cos\theta + 1) + 7i\sin\theta| \\ &= \sqrt{25\cos^2\theta + 49\sin^2\theta - 10\cos\theta + 1} \\ &= \sqrt{24\sin^2\theta - 10\cos\theta + 26} \end{aligned} \begin{aligned} &= \sqrt{(24 - 24\cos^2\theta) - 10\cos\theta + 26} \\ &= \sqrt{-24\cos^2\theta - 10\cos\theta + 50} \\ &= \sqrt{-24\left(\cos^2\theta + \frac{5}{12}\cos\theta + \frac{25}{576}\right) + 50 + \frac{25}{24}} \\ &= \sqrt{\frac{1225}{24}} = \frac{35}{\sqrt{24}} = \frac{35}{2\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{12} \end{aligned}$$

11. 若實數 a, b 滿足 $\begin{cases} a^3 - 6a^2 + 15a + 2025 = 0 \\ b^3 - 15b^2 + 78b - 2179 = 0 \end{cases}$, 試求 $a+b$ 的值為 7。

$$\text{設 } a+b=k \Rightarrow a=k-b$$

$$\Rightarrow (k-b)^3 - 6(k-b)^2 + 15(k-b) + 2025 = b^3 - 15b^2 + 78b - 2179$$

$$\Rightarrow k^3 - 3k^2b + 3kb^2 - b^3 - 6k^2 + 12kb - 6b^2 + 15k - 15b + 2025 = b^3 - 15b^2 + 78b - 2179$$

$$\Rightarrow b^3 + (3k-6)b^2 + (-3k^2+12k-15)b + (k^3-6k^2+15k+2025) = b^3 + 15b^2 + 78b - 2179$$

$$3k-6=15$$

$$\Rightarrow k=7$$

12. 已知數列 $\{a_n\}$ 其前 n 項和 $S_n = 2a_n - 3 \times 2^n + 4$ (n 為正整數), 試求 a_n 的一般項為 $(2n-1) \cdot 2^{n-1}$ 。

$$S_{n-1} = 2a_{n-1} - 3 \times 2^{n-1} + 4, a_1 = 2$$

$$\Rightarrow a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + 2a_{n-1} \cdot 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow a_n = 2a_n - 2a_{n-1} - 3 \times 2^{n-1} + 3 \times 2^{n-1} - 4$$

$$\Rightarrow a_n = 2a_{n-1} + 2a \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a_n = 2a_n - 2a_{n-1} - 6 \times 2^{n-1} + 3 \times 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow a_n - \frac{3}{2}n \cdot 2^n = 2(a_{n-1} - \frac{3}{2}(n-1) \cdot 2^{n-1})$$

$$\Rightarrow a_n = 2a_{n-1} + \frac{3}{2} \times 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow a_n = 2^{n-1} \cdot (-1) + \frac{3}{2}n \cdot 2^n$$

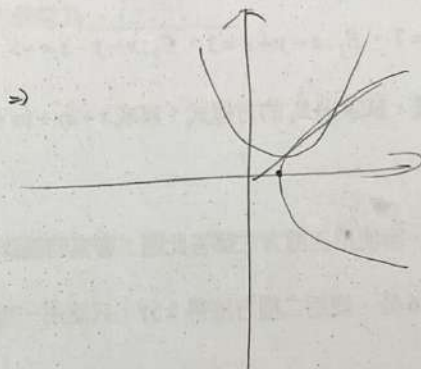
$$\Rightarrow a_n - a_{n-1} \cdot 2^n = 2(a_{n-1} - a_{n-1} \cdot 2^{n-1})$$

$$\Rightarrow a_n = 2^{n-1}(3n-1)$$

13. 試求 $\sqrt{4x-2} = \frac{x^2+2}{4}$ 的所有實數解為 $2 \pm \sqrt{2}$ 。

$$y = \sqrt{4x-2} \Rightarrow y^2 = 4x-2$$

$$y = \frac{x^2+2}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}$$



$$\Rightarrow y = x \text{ (對稱軸)}$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

二、非選擇題與證明題 (計 3 題, 共 22 分):

1. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對邊為 a 、 b 、 c ($a \neq b$), 且 $\angle A = \alpha$, $\angle B = \alpha - 2\beta$; 有另一個 $\triangle A'B'C'$, $\angle A'$ 、 $\angle B'$ 、 $\angle C'$ 的對邊為 a' 、 b' 、 c' , 且 $\angle A' = \alpha - \beta$, $\angle B' = \beta$, 其中 $0^\circ < 2\beta < \alpha < 180^\circ$

$$\text{試證明: } \frac{a'^2 + c'^2 - b'^2}{b'^2 + c'^2 - a'^2} = \frac{a+b}{a-b}$$

(證明題, 8 分。請勿將 α , β 以帶入特別角的方式進行驗證)

2. 已知 $x > 1$, $y > 1$, $z > 1$ 且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$, 試證 $\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$

(證明題, 8 分。)

$$\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} \right) (x+y+z) \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

3. 坐標空間中, 考慮三個平面 $E_1: x+y+z=7$ 、 $E_2: x-y+z=3$ 、 $E_3: x-y-z=-5$, 若坐標空間中第四個平面 E_4 與 E_1 、 E_2 、 E_3 圍出一個邊長為 $6\sqrt{2}$ 的正四面體, 試求出 E_4 的方程式 (寫成 $x+ay+bz=c$ 的形式)

上述為 113 學年度分科測驗數學甲試題, 請使用三種方法解答此題, 書寫時請詳列計算過程。

(非選擇題, 6 分。使用三種以上方法得 6 分, 使用二種方法得 3 分, 只使用一種方法或未作答不予計分)

$$x+y-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$$