

# 國立南科國際實驗高級中學 114 學年度第 1 次教師甄選 試題卷

科目：國中部 數學 科

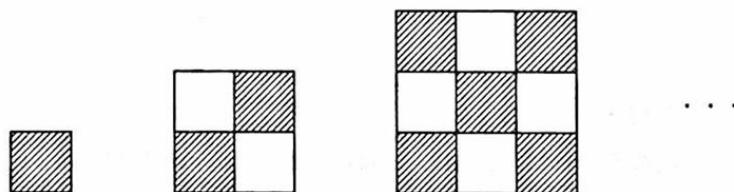
第一大題、填充題：60%（請依題號順序作答）

1. 記號 $[a]$ 表示小於或等於  $a$  的整數中最大的。例如 $[3.12]=3$ ，求  $\frac{1}{\lfloor \sqrt{1936} \rfloor} + \frac{1}{\lfloor \sqrt{1937} \rfloor} + \frac{1}{\lfloor \sqrt{1938} \rfloor} + \dots + \frac{1}{\lfloor \sqrt{2024} \rfloor}$  的值？

2. 有很多塊邊長為 1 單位的正方形磁磚，其中分成斜線圖樣磁磚和純白磁磚兩種。請用這些磁磚按照下面規則，依序組出邊長為 1、2、3……的正方形區塊(如下方示意圖)。

- 邊長為 1 的正方形由 1 塊斜線磁磚組成。
- 邊長為  $n, n \geq 2$  的正方形區域，最左下角為斜線圖樣磁磚，且相鄰磁磚為不同形式。

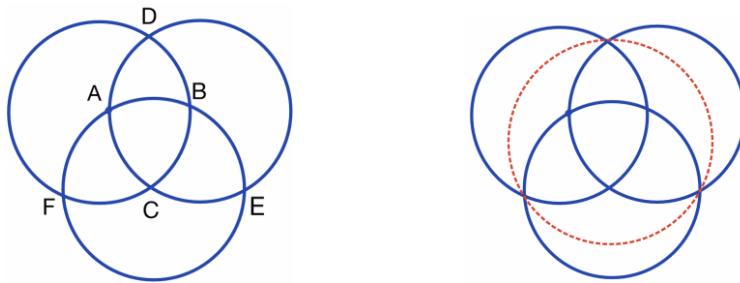
試問：若正方形區域共使用斜線磁磚總數為 221 個，這個正方形區域的邊長是？



3. 實數數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) a_n$ ，其中  $n$  為正整數，求  $\frac{a_{100}}{a_1} = ?$

4. 有一班級 36 人分成 A,B,C 三組，某次的數學科測驗成績知道全班平均分數為 87 分；A 組的平均成績為 78 分；A,B 組合併計算平均成績為 70 分；A,C 組合併計算平均成績為 95 分，問 A 組有\_\_\_\_\_人。

5. 如下方示意圖，已知中心對稱排列的 3 個單位圓(半徑為 1)，此三圓圓心分別位於 A、B、C 三點( $\triangle ABC$ 為一正三角形)，且此三圓交於 A、B、C、D、E、F 六個點，求此三圓所能完整覆蓋的最大半徑的圓其半徑為？(圖示中虛線所圍圓形即為此三圓所覆蓋的圓之一)



6. 請計算  $\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{4 \times 7} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} + \dots = ?$

7. 已知一元二次方程式  $2x^2 - x - a = 0$ ，其中  $a > 0$ 。若  $a = 1, 2, 3, \dots, n$  所對應的一元二次方程式的兩根為  $\alpha_n$  與  $\beta_n$ ，

則請問  $\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1}\right) \times \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2}\right) \times \dots \times \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n}\right)$  的值？

8. 正方形  $ABCD$  的兩頂點  $A$ 、 $B$  在二次函數  $y = x^2$  上， $C$ 、 $D$  兩點在  $y = x - 2$  上，求此正方形邊長？

9. 試求  $5 + \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 8x + 52}$  的最小值( $x$ 為實數)。

10. 已知平面上四點  $A(0,0)$ 、 $B(2,5)$ 、 $C(3,4)$ 、 $D(4,0)$ ，過  $A$  點的一條直線將四邊形  $ABCD$  切成面積相等的兩部份，且此直線與  $\overline{CD}$  交於  $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ ， $\frac{p}{q}$ 、 $\frac{r}{s}$  皆為最簡分數，則  $p+q+r+s=?$
11. 水平桌面上放有四個半徑為 4 的球，且相鄰的球都相切，在此四球的上面放置一個半徑為 2 的小球，它和底下的四個球恰好都相切，則小球的球心到水平桌面的距離為何？
12. 設  $f(x)$  是三次實係數多項式函數滿足  $|f(1)|=|f(2)|=|f(3)|=|f(5)|=|f(6)|=|f(7)|=18$ 。試求  $|f(0)|$  之值。

## 第二大題、申論題：40%（請依題號順序，清楚標示題號，由上而下作答）

1. 「三角形全等性質有五種： $SSS$ 、 $SAS$ 、 $ASA$ 、 $AAS$ 、 $RHS$ 」，請回答下列問題：
- (1) 請舉例並說明為何  $SSA$  並不是三角形全等性質之一。(10 分)
- (2) 小鑫同學：「 $RHS$  全等性質其實是一種特例的  $SSA$ ，因為  $A=90^\circ$ ，所以只要今天將所有  $SSA$  條件的  $A$  全部改為  $90^\circ$ ，例如： $\overline{AB}=5$ ， $\overline{AC}=3$ ， $\angle C=60^\circ$ ，只要將條件改為  $\angle C=90^\circ$ ，就可以改由根據  $RHS$  畫出唯一一個三角形。」請問小鑫同學的論點是否正確？請說明(10 分)

2. 說明：針對以下三個學習內容指標及說明(S-8-6 畢氏定理、A-8-7 一元二次方程式的解法與應用、S-9-2 三角形的相似性質)，請各設計一題段考的素養考試試題，每題均需指明評量的目標為何？(20 分)

**S-8-6 畢氏定理：**

畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形。

基本說明：

1. 了解只有一個角為直角的三角形，是直角三角形，並認識其斜邊與股的意義。
2. 認識畢氏定理（勾股弦定理、商高定理），即直角三角形斜邊長的平方等於兩股的平方和；並介紹其相關的數學史。
3. 從給定直角三角形其中兩邊的長，依據畢氏定理求出第三邊的長；並將畢氏定理應用於生活情境中的問題，必要時可使用計算機輔助計算。
4. 了解三角形的三邊長滿足畢氏定理必定是直角三角形。

**A-8-7 一元二次方程式的解法與應用：**

利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。

基本說明：

1. 能利用因式分解解一元二次方程式。
2. 能利用配方法解一元二次方程式。
3. 能利用公式解解一元二次方程式。
4. 能利用一元二次方程式解應用問題（需驗證根的合理性）。
5. 給定一元二次方程式的「判別式」，決定，方程式有相異兩解（相異兩根）、有一解（重根）；或方程式無解。
6. 能利用計算機（配合公式解）估計一元二次方程式解的近似值。

**S-9-2 三角形的相似性質：**

三角形的相似判定（AA、SAS、SSS）；對應邊長之比 = 對應高之比；對應面積之比 = 對應邊長平方之比；利用三角形相似的概念解應用問題；相似符號（~）。

基本說明：

1. 理解三角形的AA、SAS、SSS等相似性質。
2. 使用相似符號「~」記錄兩相似三角形。
3. 理解兩相似三角形中，對應邊長之比 = 對應邊高之比，及對應面積之比 = 對應邊長平方比。