

國立基隆女中 114 學年第 1 次教師甄試 筆試試題 數學科

一、填充題(每題 7 分，共 70 分)

1. 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} \left[\sqrt{4n^2 - (2 \times 1^2)} + \sqrt{4n^2 - (2 \times 2^2)} + \cdots + \sqrt{4n^2 - (2 \times n^2)} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$

【簡答】 $\frac{5\sqrt{2}(\pi + 2)}{4}$

2. 若 x 為實數，試求 $f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 3}{x^2 + 1}$ 的最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$

【簡答】 $\frac{-1 + \sqrt{41}}{2}$

3. 已知 m, n 為正整數且滿足 $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{2783}$ ，試求數對 (m, n) 的組數。

【簡答】10

4. 空間中有一個四面體 $OABC$ ，邊 $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ 的長度分別為 $\sqrt{13}, 5, 5$ ，且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 1$ ，

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -11$ ，試求四面體 $OABC$ 的體積。

【簡答】 $6\sqrt{5}$

5. 設有 525 人站成一排，從第一名開始 1 至 3 報數(1,2,3,1,2,3,...)，凡報到 3 的人就退出隊伍，其餘向前靠站成新的一排，再按此規則繼續進行，直到報數後只剩下三個人為止，則最後的第三個人，最初的位置是 525 人中的第 $\underline{\hspace{2cm}}$ 號位置

【簡答】475

6. 近期在短影音流行的一句歌詞：「大江大海江大海」，這句歌詞共七個字。請問同字不相鄰的排列方法有幾種？

【簡答】38

7. 在複數平面上，複數 z 是單位圓上的任一點，且當 $z = z_0$ 時，函數 $f(z) = |z^2 - 2z + 5|$ 有最小值 m ，試求數對 (z_0, m) 。

【簡答】 $\left(\frac{3}{5} \pm \frac{4}{5}i, \frac{8\sqrt{5}}{5} \right)$

8. 已知三次函數 $f(x) = x^3 - x^2 - px + \frac{3}{2}p$ ，其中 p 是實數。若方程式 $f(x) = 0$ 有三個相異實根，試求 p 的範圍。

【簡答】 $0 < p < \frac{3}{16}$ 或 $p > 8$

9. 已知連乘符號的定義為 $\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$ ，且 $[x]$ 為不大於 x 之最大整數。若

$\prod_{k=1}^n 2^{\lceil \log_{45} k \rceil} = 1024^{1024}$ ，則 $n =$

【簡答】6154

10. 已知 F 為拋物線 $\Gamma: y^2 = 4x$ 的焦點， $\triangle ABC$ 的三個頂點都在 Γ 上， P 為 \overline{AB} 的中點，且 $\overline{CF} = 2\overline{FP}$ ，則 $\overline{FA} + \overline{FB}$ 的最大值為_____

【簡答】5

二、計算證明題(每題 10 分，共 30 分)

11. 紿定兩變量數據 $X = \langle x_i \rangle_{i=1}^n$ 、 $Y = \langle y_i \rangle_{i=1}^n$ 。在其散布圖中，給定此迴歸直線 $y = a + bx$ ， $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ，並利用「最小平方法」求此迴歸直線。

- (1) 設數據 X 的平均為 μ_x ，數據 Y 的平均為 μ_y 。試證此迴歸直線 $y = a + bx$ 必通過 (μ_x, μ_y) 。
- (2) 設數據 X 的標準差為 σ_x ，數據 Y 的標準差為 σ_y ，兩數據之間的相關係數為 r 。

試證 $b = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ 。

答:略

12. 已知 $P(1,1)$ 為橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 內一點，過 P 作橢圓的弦 $\overline{A_1A_4}$ 、 $\overline{A_2A_5}$ 、 $\overline{A_3A_6}$ ，任兩相鄰的弦的夾角之一為 $\frac{\pi}{3}$ ，試求 $\frac{1}{\overline{PA_1} \times \overline{PA_4}} + \frac{1}{\overline{PA_2} \times \overline{PA_5}} + \frac{1}{\overline{PA_3} \times \overline{PA_6}}$ 的值。

答:略

13. 在 30 天的賽程中，有一個棒球隊每天至少要比一場球，但 30 天的總比賽場數不超過 45 場。試證：存在一個時期(連續多日)，該球隊在這個時期內比賽的總場數為 14 場

答:略