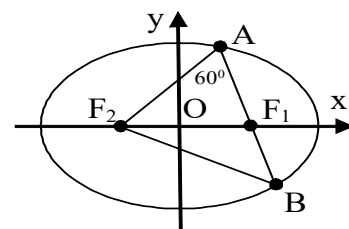


國立蘭陽女中 114 學年度第二次教師甄試 數學科 試題

一、填充題：(每格 5 分，共 70 分)

請在答案卷第一頁作答，並依序標明題號，不須計算過程，僅須寫出最後的答案

1. 投擲一個六面刻有 1, 1, 1, 2, 2, 3 的公正骰子 n 次，設 P_n 表示此 n 次之點數和為偶數的機率，請寫出數列 $\langle P_n \rangle$ 的遞迴關係式。
2. 有大小形狀相同的紅球 1 個，黃球 2 個，白球 2 個，黑球 3 個，全部排成甲、乙、丙三列，每列至少一球，問：共有多少種不同的排法？
3. 在坐標平面上第一象限有一點 A 在直線 $x - \sqrt{3}y = 0$ 上，另一點 B 在 x 軸的正向上。已知 $\overline{AB} = 4$ ， O 為原點，試求 $\triangle OAB$ 面積的最大值。
4. 求 $x = 3^{200} - 2025$ 的十位數字。
5. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ ， $n \in \mathbb{N}$ ， $c \in \mathbb{R}$ ， $A + A^4 + A^7 + \cdots + A^{3n+1} = cA$ ，求 c 之值。
6. 某人由平面上一點 A 測得正東方一塔(塔頂 T)的仰角為 θ ，由 A 向塔底 D 前進 150 公尺至 B 點再測得塔頂 T 的仰角為 2θ ，再前進 60 公尺至 C 點測得塔頂 T 的仰角為 3θ ，其中 A 、 B 、 C 都在塔的同一側，求塔高 \overline{TD} 之值。
7. 空間中兩直線 $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ 與 $L_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ 在平面 $E: x - y + az = 3$ 上的正射影為兩條平行直線，試求實數 a 的值。
8. 已知 F_1 、 F_2 為橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{18} = 1$ 上的兩焦點， A 、 B 兩點都在橢圓上，且 \overline{AB} 通過 F_1 ，若 $\angle F_1AF_2$ 夾角為 60° ，試求 $\triangle F_1AF_2$ 的面積。



9. 設 $w = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ ，在複數平面上 $A_i(w^i), (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ，表七個點，試求 $\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2} \cdot \overline{A_0A_3} \cdot \overline{A_0A_4} \cdot \overline{A_0A_5} \cdot \overline{A_0A_6}$ 之值。

10. $x, y \in \mathbf{R}$, $(x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$, 若 $\frac{x-y+3}{x+y+2}$ 之最大值為 M , 最小值為 m , 求數對 (M, m) 。

11. 某連鎖加盟店統計每日營業時間 X (小時) 與當月營業利潤 Y (十萬元) 對照表如下：

每日營業時間 X (小時)	4	6	8	10	12
當月營業利潤 Y (十萬元)	6	6	8	10	10

求 Y 對 X 的迴歸直線方程式。

12. 球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 19 = 0$, 平面 $E: x - 2y + 2z - 5 = 0$, $E \cap S$ 為一圓 C , 求圓 C 投影在 xy 平面上的曲線所圍成之面積。

13. 求直線 $L: 2x - y + 1 = 0$ 以 $(0, 1)$ 為中心, 逆時針方向旋轉 45° 後之直線方程式。

14. 解不等式: $(\log_{\frac{1}{3}} x - 1)(\log_{\frac{1}{4}} x + 2)(\log_{\frac{1}{5}} x - 3) > 0$ 。

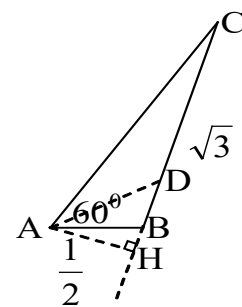
二、計算題：共 45 分，請在答案卷第二頁開始作答，並標明題號。

1. 如圖, $\triangle ABC$ 中, $\overline{BC} = \sqrt{3}$, $\angle BAC = 60^\circ$, \overline{BC} 邊上的高 \overline{AH} 為 $\frac{1}{2}$, $\angle A$ 的角平分線交 \overline{BC} 邊於 D 點, 求下列各小題:

(1) $\overline{AB} \times \overline{AC}$ (5 分)

(2) $\overline{AB} + \overline{AC}$ (5 分)

(3) $\angle A$ 的角平分線段 \overline{AD} 的長 (5 分)



2. 已知函數 $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + x$, 回答下列問題

(1) 求與曲線 $y = f(x)$ 恰有 2 個交點的直線 $y = g(x)$ 為何? (10 分)

(2) 上述(1)中兩圖形所圍出之封閉區域的面積為何? (5 分)

3. $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbf{R}$, 證明 :

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

等號成立 $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}, s.t. b_i = \lambda a_i, i = 1, 2, \dots, n$ (15 分)