

國立屏東高中 114 學年第 1 次正式教師甄試數學科筆試試題(含詳解)

一、填充題:每題 5 分，共 50 分

1. 設方程式 $x^5 + x^4 - x^2 + 1 = 0$ 的五個根為 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ ，令 $P(x) = x^4 - 1$ ，則 $P(\alpha_1) \times P(\alpha_2) \times P(\alpha_3) \times P(\alpha_4) \times P(\alpha_5) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 0
2. 求座標平面上 $(13x - 9y + 5)^2 + (9x + 13y - 4)^2 \leq 1000$ 的區域面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。 4π
3. 已知 P 點在函數 $y = 2e^x$ 上， Q 點在函數 $y = \ln \frac{x}{2}$ 上，試求 \overline{PQ} 長度的最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。 $\sqrt{2}(1 + \ln 2)$
4. 無窮級數 $\frac{1}{C_3^3} + \frac{2}{C_3^4} + \frac{3}{C_3^5} + \dots + \frac{k}{C_3^{k+2}} + \dots$ 之和為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。 3
5. a, b 為常數，若兩個方程式 $x^2 - x + a = 0$ 和 $x^2 - x + b = 0$ 的四個根形成一個首項為 $\frac{1}{4}$ 的等差數列，則此數列的公差為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。 $\frac{1}{6}$
6. 雙曲線 $4x^2 - y^2 = 9$ 之弦被點 $(4, 2)$ 平分，則此弦所在的直線方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
 $8x - y - 30 = 0$
7. 平面上 $\triangle ABC$ ，其中 $\overline{AB} = 7$ ， $\angle ACB = 60^\circ$ ，且 \overline{CA} ， \overline{CB} 皆為整數，則符合條件的三角形有多少個 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。 5
8. 複數平面上有三點 P, Q, R 對應三個複數 Z_1, Z_2, Z_3 且 $|Z_1| = \sqrt{2}$ ， $|Z_2| = \sqrt{5}$ ， $|Z_3| = 3$ ，若原點 O 為 $\triangle PQR$ 之重心，則 $\overline{Z_1} \cdot Z_2$ 的實部為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。 1
9. 連續丟擲一公正的硬幣，過程中若連續三次擲出正面就停止，若恰好擲了 8 次才停止，則第一次擲出正面的機率為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。 $\frac{6}{13}$

10. 給定一個邊長為 9 的正四面體 $ABCD$ ，設 A' 為 A 對於平面 BCD 的對稱點， B' 為 B 對於平面 ACD 的對稱點，則線段 $\overline{A'B'}$ 之長為_____。 15

二、計算題:每題 10 分，共 50 分

1. 在 $\Gamma: y = x^3$ 上有一點 P ，已知 P 在第一象限且其 x 坐標為 a ，現以 P 為切點作 Γ 之切線 L 交 y 軸於點 Q ，且交 Γ 於另一點 S ，試求：
- (1) $\overline{PQ}:\overline{QS}$ 。 $\overline{PQ}:\overline{QS} = 1:2$
- (2) Γ 與切線 L 所圍成之封閉區域的面積。(以 a 表示) $\frac{27}{4}a^4$
2. 空間中一定點 $A(2, 6, -3)$ ，一平面 $E: x + 2y + 2z + 1 = 0$ ，已知平面 E 上有一圓 C ，圓心為 $Q(-3, 2, -1)$ ，半徑為 2，若動點 P 在圓 C 上，試求 \overline{AP} 之最大值與最小值。 最大值為 $\sqrt{73}$ ，最小值為 5
3. 空間中兩歪斜線 $L_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-2}$ ， $L_2: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-2}$ ，若正 $\triangle PQR$ 中， P 在 L_1 上，且 Q, R 都在 L_2 上，求 $\triangle PQR$ 的最小面積為。 $\frac{49\sqrt{3}}{135}$
4. 試求 $\cos^2(A-B) + \cos^2(B-C) + \cos^2(C-A)$ 的最小值為。 $\frac{3}{4}$
5. 一個外星人來到地球後，每天選擇以下四件事中的一件完成，每件事選擇的機率相等(即每個選擇發生的機率為 0.25)：
- (1) 自我毀滅
- (2) 分裂成兩個外星人
- (3) 分裂成三個外星人
- (4) 什麼也不做
- 此後每天，每個外星人均會做一次選擇，且彼此之間互相獨立，求地球上沒有外星人的機率為。 $\sqrt{2} - 1$