

基隆市 114 學年度  
市立中山、安樂、八斗高級中學教師甄選

## 數學科試題

考生作答說明：

- 一、請先檢視答案卷(卡)准考證號碼、姓名是否相符？  
如果不符，請立即向監試人員反映。
- 二、本試題計有：填充題 10 題，計算題 1 題，證明題 1 題。
- 三、題目如涉及計算，禁止使用電子計算功能設備運算。
- 四、答案卡請使用黑色 2B 鉛筆畫記作答，禁止使用立可白  
塗改，以免 無法判讀。
- 五、答案卷(卡)與試題卷須一起繳交，始可離開試場。

# 基隆市114學年度市立中山、安樂、八斗高級中學教師甄選

## 數學科試卷

### 一、 填充題(每格 7 分，共 70 分)

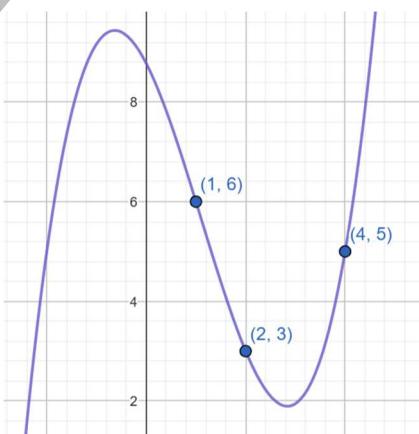
1. 某次考試有 5 題是非題，若全部亂猜，計算猜對題數的期望值。
2. 用繩子纏繞一氣球上的大圓(亦即大圓所在的平面包含球心)，當此氣球膨脹使得直徑增加 2 公分，經測量得知所需繩長增加 6 公分(以 1 位有效數字記錄)。若把地球視為半徑 6,000 公里的球體，想像有一條電纜繞纏地球上的大圓，若地球膨脹，使得地球半徑增加 1 公分，計算此電纜的長度增加量(公分)。
3. 希克定律(Hick's Law)指出人們從各種選項中作決定時，所需思考時間隨著選項增加呈現對數模式成長。例如，顧客從  $n$  種飲料作出選擇所需的時間  $T$ (秒)可用

$$T = 2 \ln(n+1)$$

作為數學模型。若希望顧客在 3 秒內作出決定，求出選項數量的最大值。

4. 某地區的天氣型態簡化為晴天與雨天，並採用馬可夫鏈(Markov Chain)作為數學模型：如果今天是晴天，明天仍是晴天的機率為 0.7，如果今天是雨天，明天仍是雨天的機率為 0.6，依照此數學模型，晴天雨天之比值會趨於穩定，求出此比值。
5. 求出此集合  $\left\{ k > 0 : (-1 + \sqrt{3}i)^k \in \mathbb{R} \right\}$  的最小值。
6. 計算橢圓  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  內接四邊形的最大面積。
7. 調整球內接圓柱的尺寸，使得圓柱有最大的體積，計算此時球對圓柱的半徑比值。
8. 設  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ，計算  $A^4 - 2A^3 + 3A^2 - A$ 。
9. 下圖為連續函數  $f$  的部分圖形，定義另一函數  $g$  如下：

$$g(x) = \int_0^{2x} f(t) dt$$



計算函數  $g$  在  $x = 2$  的導數。

10. 某校想知道學生曾經在段考中作弊的比例，以隨機化回答技術(Randomized Response Technique, RRT)抽測 100 位學生：
- (1) 請投擲兩枚公平硬幣。
  - (2) 若編號 1 的硬幣為正面，回答

問題 1:「你是否曾在段考中作弊？」，  
否則回答

問題 2:「編號 2 的硬幣是否為正面？」。

由於只有受測者知道自己投擲硬幣的結果，他人無從得知受測者回答哪一個問題，也就無從得知受測者是否曾在段考中作弊，因此保護了學生的隱私。

假設抽測結果有 35 位學生回答「是」，估計該校學生曾在段考中作弊的百分比。

二、 計算題(15分，請詳列算式於答案卷，否則不予計分)

為設計可在 Geogebra 或 Desmos 用滑桿控制的動態圖形：讓單位拋物線(正焦弦長為 1)繞著其焦點旋轉(自轉)，而其焦點同時繞著單位圓  $x^2 + y^2 = 1$  旋轉(公轉)，下圖是 4 組不同滑桿數值(參數)所呈現的圖形，參數  $\alpha$  表示拋物線公轉的相位(phase)，參數  $\beta$  表示焦點在單位圓上自轉的相位。

$\alpha = 0$ $\beta = 0$	$\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\beta = \frac{\pi}{2}$	$\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\beta = \pi$	$\alpha = \pi$ $\beta = \frac{3\pi}{2}$

寫出能達到此效果的參數方程式。

三、 證明題(15分，請詳列算式於答案卷，否則不予計分)

$f$ 為實係數多項式，試證  $f(f(x))-x$  可被  $f(x)-x$  整除。

新題精選