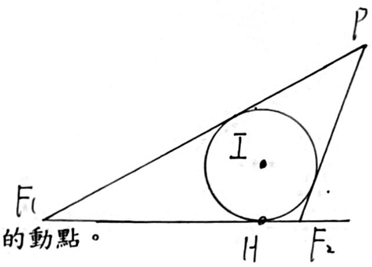
114武陵



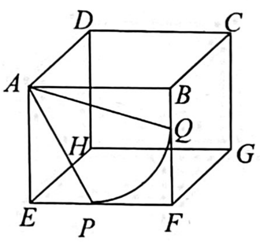
二、計算證明題：(每題 10 分；共 30 分)

$\sqrt{15}$ 1. 已知雙曲線 $\Gamma:\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{15}=1$ 的焦點為 F_1、F_2。假設 $P(a,b)$ 為 Γ 上異於頂點的動點。

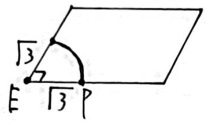
若 $r(a)$ 為 ΔPF_1F_2 的內切圓半徑，則 $\lim\limits_{a\to\infty} r(a)=$ 當 $x\to\infty$ 時 角平分線(切線)很靠近漸近線

$|\overline{HF_1}-\overline{HF_2}|=2a \Rightarrow H\in\Gamma$ 又 $H\in x$軸 $\Rightarrow H(\pm a,0)\Rightarrow I(\pm a,y)$，$y=\frac{b}{a}x \Rightarrow y\to\frac{b}{a}(\pm a)=\pm b$ 故 I 軌跡 $\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{array}{l}x=\pm a\\ -b<y<b\\ y\neq 0\end{array}\right\}$

$\frac{5\sqrt{3}\pi}{2}$ 2. 右圖為示意圖，已知正方體 $ABCD-EFGH$ 之邊長為 3，另有以 A 為球心，$2\sqrt{3}$ 為半徑之球面，問球面與正立方體表面所交出之曲線長為何？



$$\left(2\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 3=\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi$$



3. 一個 $2n$ 位正整數，若將其中任意兩個位數的數字互換得到一個新的 $2n$ 位正整數，稱之為一次交換。例：將「3698170230」中的 3 跟 6 一次交換可以得到「6398170230」；將「29250410」中的 9 跟 0 一次交換可以得到「20250419」。證明：任意 $2n$ 位的正整數可經過有限次的交換，使得前 n 位的數字和與後 n 位的數字和，兩者差的絕對值小於等於 9，其中 n 為正整數。

yymath

1. 將 $2n$ 位數分成 A区 $1\sim n$ 位數，B区 $1\sim n$ 位數

2. 從 #1 位開始檢查 A, B区

step1: 若數字相同，則檢查下一位

step2: ～ 不同，則從未檢查的數中取兩個相同的數，置換到該位數

3. 重複步驟，直到未檢查的數均不相同

4. 將 A, B区的數字和相減，剩下相異數字的個數為 2個, 4個, …. (偶數個)

剩2個相異數：a, b . $|a-b|\le|9-0|=9$

～4個 ～ ：a,b,c,d & $a>b>c>d$. A: a, c, B: b, d

$|a+c-(b-d)|<|a+b-(b-d)|=|a-d|\le 9$

剩2k個～：$a_1,a_2,\cdots a_k\in A$, $b_1,b_2\cdots b_k\in B$, $a_1>b_1>a_2>b_2>a_3>b_3\cdots>a_n>b_n$

$|a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k-(b_1+b_2+\cdots+b_k)|$

$<|a_1+b_1+b_2+\cdots b_{k-1}-(b_1+b_2+\cdots+b_{k-1}+b_k|=|a_1-b_k|<9$