2025.5.11(日) ~ 5.17(六)
(段2) Ru

桃園市立武陵高級中等學校 114 學年度第一學期第 1 次正式教師甄選

數學科 初試試題卷 **甄選證號：**________________ **(請自行填寫)**

※ 應試說明：

★每張答案卷已標明題號，請依序作答，不可顛倒錯置。

★不得要求增補答案卷；考試結束，題目卷與答案卷請於交卷時一併繳回，**禁止攜出試場**。

一、填充題（每題 7 分；共 70 分）

$\frac{3}{4}$

1. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2+2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4}+\dots+\frac{1}{1\cdot2+2\cdot3+\dots+n(n+1)}+\dots=$__________。

$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)}{6}(2n+1+3)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

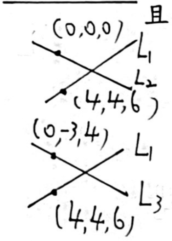
or $=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)}{3}$ ↑

$a_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\Rightarrow\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

2. 實數 a,b,c 皆不為 0，直線 $L_1:\frac{x-4}{a}=\frac{y-4}{b}=\frac{z-6}{c}$ 與 $L_2:\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ 交於一點 P，

$(-4,-2,-4)$

且 L_1 與 $L_3:\frac{x}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-4}{2}$ 交於一點 Q，試求向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的坐標表示法為__________。



$\begin{matrix}2 & 3 & 4 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3\end{matrix}$ (1, 2, −2)

$\begin{matrix}4 & 7 & 2 & 4 & 7 & 2\\ 1 & -2 & 2 & 1 & -2 & 2\end{matrix}$ (18, −6, −15)

$\begin{matrix}6 & -2 & -5 & 6 & -2 & -5\\ 1 & 2 & -2 & 1 & 2 & -2\end{matrix}$ (14, 7, 14)

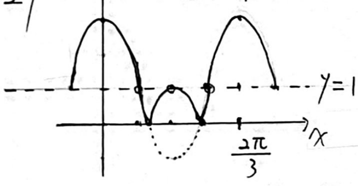
$(a,b,c)\parallel(2,1,2)$

$\frac{2t+4}{2}=\frac{t+4}{3}=\frac{2t+6}{4}\Rightarrow t=-1\Rightarrow P(2,3,4)$

$\frac{2s+4}{1}=\frac{s+7}{-2}=\frac{2s+2}{2}\Rightarrow s=-3\Rightarrow Q(-2,1,0)$

27

3. 已知 $f(x)=|2\cos3x+1|$，$0\le x\le6\pi$；若 $f(x)=1$ 恰有 n 個相異實數解，則 $n=$__________。$\Rightarrow\overrightarrow{PQ}=(-4,-2,-4)$



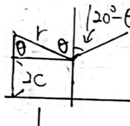
$3\cdot3\cdot3=27$

4. 如圖為一拋物線，其中 F 為交點，A、B 為拋物線上相異兩點，F 在 $\overline{AB}$ 與拋物線所夾內部區域。"焦徑"

$\frac{18-6\sqrt2}{7}$

已知 $\overline{AF}=1$，$\overline{BF}=2$，$\angle AFB=120°$，求此拋物線正焦弦長為

法2:

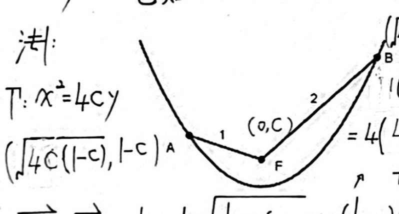


$r\cos\theta+2c=r$

$\Rightarrow r=\frac{2c}{1-\cos\theta}$

法1:

$\Gamma: x^2=4cy$



$\Rightarrow16c^4-48c^3+32c^2$

$16c^2(c^2-3c+2)=16c^4-48c^3+60c^2-36c+9=0$

$=4(4c^2-4c+1)(c^2-2c+1)+4(2c-1)(c-1)+1$ ↑

$\Rightarrow28c^2-36c+9=0$

$\Rightarrow c=\frac{36\pm12\sqrt2}{2\times28}=\frac{18\pm6\sqrt2}{28}$

$1-2c>0$

$28-(36+12\sqrt2)<0$ 不合

$\Rightarrow4c=\frac{18-6\sqrt2}{7}$

$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=-1\Rightarrow4c\sqrt{(1-c)(2-c)}+2(1-2c)(1-c)=-1$

$\begin{cases}1=\frac{2c}{1-\cos\theta}\\ 2=\frac{2c}{1-\cos(120°-\theta)}\end{cases}$ $\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt3}{2}\sin\theta\right)}{1-\cos\theta}$

$\Rightarrow2\cos\theta-\sqrt3\sin\theta=-1$

$\Rightarrow3(1-\cos^2\theta)=4\cos^2\theta+4\cos\theta+1$

$7\cos^2\theta+4\cos\theta-2=0$

$4c=2(1-\cos\theta)$

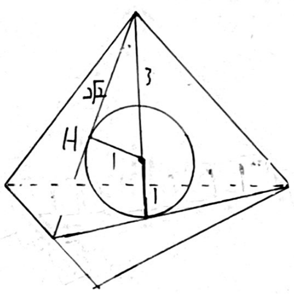
$=2-\frac{-4+6\sqrt2}{7}$

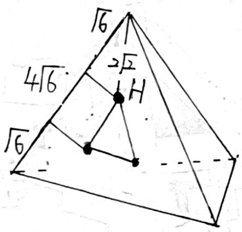
$=\frac{18-6\sqrt2}{7}$

5. 一個半徑為 1 之小球在一個內壁邊長為 $6\sqrt6$ 之正四面體容器內，小球可向各方向自由運動，

$120\sqrt3$

則在四面體容器的內壁不會被小球接觸到的面積總和為__________。

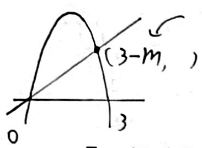




$\frac{\sqrt3}{4}\left((6\sqrt6)^2-(4\sqrt6)^2\right)\cdot4=120\sqrt3$

6. 若設坐標平面上有曲線$\Gamma_1: y=3x-x^2$與$\Gamma_2: y=mx$。Γ_1與x軸所圍的面積A被直線$\Gamma_2: y=mx$平分成二等分，求m之值為__________。

$3-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$



$x^2+(m-3)x=0$

$\frac{1}{6}\left|(3-m)^3\right| = \frac{1}{6}3^3\cdot\frac{1}{2}$

$\Rightarrow m = 3-\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{4}$

7. 從 1,2,3,4,5,6,7 這七個數中，取出任意數字組合，組合內的數字不重複(數字組合可以取 1 到 7 個數字，但是不可以不取任何數字。例：3 是取一個數字的組合；1,2,5 是取三個數字的組合)，而且每種被取出的數字組合的機率皆相等。則其數字組合的乘積是一完全平方數的機率為__________。

$\frac{7}{127}$

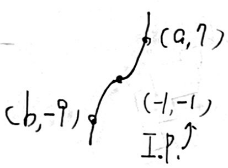
完全平方數: 1, 4, 2,3,6

$\frac{2^3-1}{2^7-1} = \frac{7}{127}$

8. 設實數a、b滿足$\begin{cases} a^3+3a^2+3a=7 \\ b^3+3b^2+3b=-9 \end{cases}$，則$a+b$的值為__________。

-2

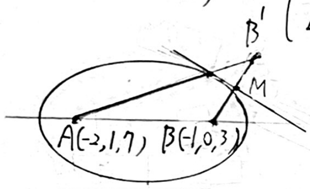
令 $f(x)=x^3+3x^2+3x$



$\Rightarrow a+b=-2$

9. 空間座標中兩平面E_1：$2x-2y+z=1$、E_2：$4x-y-z=2$，而L為E_1、E_2的交線，且E_1上有兩點$A(-2,1,7)$、$B(-1,0,3)$。若在平面E_1上以A、B為焦點作橢圓Γ，且Γ在E_1上與L相切於P。則P點坐標為__________。

$\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$



令 $y=0$：$\begin{cases} 2x+z=1 \\ 4x-z=2 \end{cases} \Rightarrow L$ 過 $\left(\frac{1}{2},0,0\right)$

$\begin{matrix} 2 & -2 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \end{matrix}$

$(3,\ 6,\ 6)$

$/\!/ (1,2,2)$

$M\left(t+\frac{1}{2}, 2t, 2t\right)$

$\overrightarrow{B'M}\cdot\vec{v} = \left(t-\frac{1}{2}, 2t-2, 2t-2\right)\cdot(1,2,2)$

$= 9t-\frac{9}{2}=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow M(1,1,1) \Rightarrow B'(3,2,-1)$

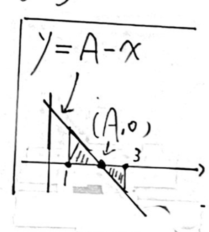
$\frac{t+\frac{5}{2}}{5} = \frac{2t-1}{1} = \frac{2t-7}{-8}$

$\Rightarrow t = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow P\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$

10. 函數$f(x)$在$[1,3]$上連續且滿足$f(x)=-x+\int_1^3|f(t)|\,dt$，則$f(2)=$__________。

2 or $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$



令 $A=\int_1^3|f(x)|dx$

$f(x)=-x+A$

① $A\geq 3$：$A=\int_1^3(-x+A)dx = -4+2A \Rightarrow A=4 \Rightarrow f(2)=-2+4=2$

② $A<1$：$A=\int_1^3(x-A)dx = 4-2A \Rightarrow A=\frac{4}{3}$ (不合)

③ $1\leq A<3$：$A=\int_1^A(-x+A)dx + \int_A^3(x-A)dx \Rightarrow A^2-5A+5=0 \Rightarrow A=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$

$= -\frac{1}{2}(A^2-1)+A(A-1)+\frac{1}{2}(9-A^2)-A(3-A)$

$= A^2-4A+5$

$\Rightarrow f(2)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$