

臺南市立沙崙國際高級中學高中部 114 學年度第 1 次教師甄選數學科試題卷

一、選擇題：5 題(10%)

1. $a \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ ，已知 a 為實係數三次多項式 $f(x)$ 的領導係數，若函數 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸交於三點，且其 x 坐標成首項為 3、公差為 a 的等差數列。試問共有幾個 a 使得 $f(0) < 0$ ？

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

2. 試求滿足 $\sin 18^\circ + \sin x^\circ = \cos 12^\circ$ 的最小正數 x 之值為？

- (A) 12 (B) 22 (C) 32 (D) 42 (E) 52

3. 已知 $f(x)$ 為三次函數，下列何者正確

- (A) 若 $f''(3) = 0$ ，則 $x = 3$ 處為反曲點。
(B) 若 $f(x)$ 在 $x = 3$ 處為反曲點，則二次函數 $f'(x)$ 在 $x = 3$ 處有最大值。
(C) 若 $f'(1) = f'(5)$ ，則 $x = 3$ 處為反曲點。
(D) 若方程式 $f'(x) = 0$ 有兩相異實根，則方程式 $f(x) = 0$ 有三相異實根。
(E) 若方程式 $f'(x) = 0$ 有兩相等實根，則方程式 $f(x) = 0$ 有重根。

4. 積空間坐標中，有一直線 $L: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{3}$ ，與一平面 $E: x - y - z = 12$ ，已知平面 E 上有一點 P 滿足 $d(P, L) = 3\sqrt{10}$ ，

下列哪些選項可能是 P 坐標？

- (A) (12, 0, 0) (B) (4, -4, -4) (C) (0, -9, -3) (D) (0, -3, -9) (E) (8, 1, -5)

5. 方陣 $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，若數列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 滿足 $A^n = a_n A + b_n I$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，下列何者正確？

- (A) $(A^2 + A)$ 有反方陣

- (B) $\{a_{2n}\}$ 是等比數列

- (C) $\{|b_n|\}$ 是等差數列

- (D) $\{a_n - b_n\}$ 是等比數列

- (E) $\{a_n^2 - b_n^2\}$ 是等差數列

二、非選題：10 題(40%)

1. 我們定義「費氏數」：利用費氏數列的原理，先寫出兩個正二位數，然後從第三個數字開始，每位數都是前兩個數相加，直到不能寫為止。比如： $12 \rightarrow 123 \rightarrow 1235 \rightarrow 12358$ ， $5+8=13$ 無法寫在一個位數了，所以 12358 就是一個費氏數。而 58, 19 就不是費氏數。請位總共有_____個「費氏數」。

2. 正六邊形 $ABCDEF$ 被圍在以平行 x 軸與 y 軸為邊的矩形 $PQRS$ 內，其中 $A(0,0), B(4,2)$ 且矩形 $PQRS$ 四邊各交此正六邊形於一點，求此矩形 $PQRS$ 的面積為_____。

3. ΔABC 中，已知 $\angle A = 60^\circ$ ， D 在 \overline{AC} 上且滿足 $\overline{AD} : \overline{CD} = 1:3$ 。若 ΔABD 的外接圓直徑 2，則 $\overline{AB} + \overline{AC}$ 的最大值為

- _____。
4. 已知多項式 $f(x)$ 滿足 $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x[\int_1^2 f(x)dx] + 3$ ，試求 $\int_1^2 f(x)dx$ 的值為 _____。
5. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = \frac{1}{3}$, $\sum_{k=1}^n a_k a_{n-k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1}$, $n = 1, 2, \dots, n$ ，則 $a_{2025} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
6. $a \in \mathbb{R}$ ，當 $a \leq x \leq a+1$ 時，函數 $f(x) = |x^2 - 3x - 4| + x + 1$ 的最大值為 $M(a)$ ，則 $M(a)$ 的最小值為 _____。
7. x, y 為實數，則 $\sqrt{(x-6)^2 + (y-5)^2 + (x+y-2)^2} + \sqrt{(x-8)^2 + (y-2)^2 + (x+y-1)^2}$ 最小值為 _____。
8. $a, b \in \mathbb{Z}$ ，已知整係數多項函數 $f(x)$ 滿足 $f(2 + \sqrt{3}) = a - 2\sqrt{3}$ ，且 $f(x+2)$ 除以 $(x^2 - 3)$ 的餘式為 $(bx + 5)$ ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. 某店家辦理摸獎活動共有 100、200、300、400、500 元等五個獎項，花 100 元就可以摸獎一次。摸彩箱裡頭有 5 個紅球並分別標示獎項的金額、以及 15 個白球，一次取一球取後不放回，每一個球被取到的機會均等。小南想要一直玩到抽中所有獎項為止，則獲利的期望值為 _____。
10. 設 $x \in \mathbb{R}$ ， $f(x) = 1024^{\sin x} + 1024^{\cos x}$ ，將函數的最小值用科學記號表示為 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq a < 10$ 且 n 為整數。若 a 的整數部分為 m ，則數對 $(m, n) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。