1. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一等比數列。已知前十項的和為 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=60$，前五個偶數項的和為 $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=40$，試選出首項 a_1 的正確範圍。

(A) $0.05 \le a_1 < 0.06$ (B) $0.06 \le a_1 < 0.07$ (C) $0.07 \le a_1 < 0.08$ (D) $0.08 \le a_1 < 0.09$

$\frac{a_1(r^{10}-1)}{r-1}=60$，$\frac{a_1 r(r^{10}-1)}{r^2-1}=40 \Rightarrow \frac{r}{r+1}=\frac{2}{3} \Rightarrow r=2 \Rightarrow a_1=\frac{60}{1023} \doteq 0.053 \Rightarrow$ (A)

---

2. 同時擲四顆相同的公正骰子，已知每次擲骰子所出現點數的情況皆獨立，直到四顆骰子的點數乘積為完全立方數時才停止擲骰子，則投擲次數的期望值最接近下列哪一個正整數？(A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 22

$7\overline{)144}$ 20.5

$1, 2, 3, 2^2, 5, 2^1\times 3^1$

$(1,1,1,1) \Rightarrow 1$
$(1,1,2,4) \Rightarrow 12$
$(1, 3\times ②\sim⑥) \Rightarrow 5\times 4=20$
$(2,3,6,6) \Rightarrow 12$
$(3,3,4,6) \Rightarrow 12$
$(2,2,4,4) \Rightarrow 6$

$X \sim Geo(\frac{63}{6^4}) \Rightarrow E(X)=\frac{\cancel{36}^{4}\times 36}{\cancel{63}_{7}} \doteq 20.57 \Rightarrow$ (C)

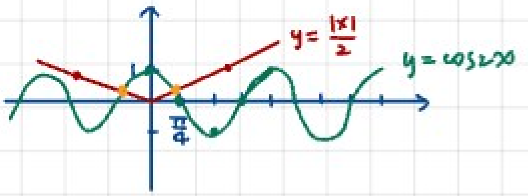
---

3. 設 $f(x)=\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x$，且 $g(x)=f\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)-|x|$，試問 $y=g(x)$ 的圖形與 x 軸的交點個數。(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

$f(x)=2\sin(2x+\theta)$，$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)=2\sin(2x+\frac{5}{6}\pi)$

$\Rightarrow f(x+\frac{5}{6}\pi)=2\sin(2x+\frac{15}{6}\pi)=2\cos 2x$

$\Rightarrow$ 求 $\cos 2x$ 和 $\frac{|x|}{2}$ 交點數



2交點 $\Rightarrow$ (B)

---

4. 一副撲克牌原有52張牌，不小心遺失了1張(假設每種花色遺失的機率都是 $\frac{1}{4}$)，由剩下的51張任取2張。求所取2張都是紅心的條件下，遺失的那一張也是紅心的條件機率為下列何者? (A) $\frac{11}{24}$ (B) $\frac{11}{50}$ (C) $\frac{11}{250}$ (D) $\frac{11}{425}$

lost 紅 $\Rightarrow \frac{1}{4}\times\frac{C^{12}_2}{C^{51}_2}$ $(=P_1)$

lost 非紅 $\Rightarrow \frac{3}{4}\times\frac{C^{13}_2}{C^{51}_2}$ $(=P_2)$

$\Rightarrow$ 所求 $=\frac{P_1}{P_1+P_2}=\frac{C^{12}_2}{C^{12}_2+3\times C^{13}_2}=\frac{66}{66+234}=\frac{66}{300}=\frac{11}{50} \Rightarrow$ (B)

5. 令 $f(x)=x(x^2+1)(x^3+x+2)$，試問有多少個實數 a 滿足 $\int_0^a f'(x)dx=0$？

(A) 1個　(B) 2個　(C) 3個　(D) 4個

$\int_0^a f'(x)dx = f(a)-f(0) = f(a) = 0 \Leftrightarrow a=0$ or -1 ⇒ (B)

---

6. 已知 $(x+\frac{1}{\sqrt[5]{x}})^n$ 的展開式中，各項係數和為4096，將展開式中 $(n+1)$ 項重新排列，試問整數次方項不相鄰的機率為何? (A) $\frac{1}{22}$　(B) $\frac{7}{22}$　(C) $\frac{7}{26}$　(D) $\frac{15}{26}$

$2^n = 4096 \Rightarrow n=12$

$C^{12}_k \cdot x^{12-k}\cdot x^{-\frac{k}{5}} = C^{12}_k\, x^{12-\frac{6}{5}k}$ ⇒ 整數次方項 $k=0$ or 5 or 10

⇒ 整 3 項，非整 10 項 ⇒ 所求 $= \frac{10!\times C^{11}_3\times 3!}{13!} = \frac{\cancel{11}\times \cancel{10}^{5}\times \cancel{9}^{3}}{13\times \cancel{12}_{\cancel{4}_2}\times \cancel{11}} = \frac{15}{26}$

---

7. $x,y\in Z$，試問 $\left|\frac{x}{3}+\frac{y}{4}-\frac{114}{5}\right|$ 之最小值為何? (A) $\frac{1}{15}$　(B) $\frac{1}{20}$　(C) $\frac{1}{30}$　(D) $\frac{1}{60}$

$\frac{1}{60}|20x+15y-1368|$ ，∵ $5\,|\,20x+15y$，$\forall x,y\in Z$ ∴ $20x+15y-1368 \neq \pm 1$

$20x+15y-1368=2 \Leftrightarrow 4x+3y=274$ ，∵ $\gcd(3,4)=1$ ∴ $4x+3y=274$ 有整解 ⇒ (C)

---

8. 若線性方程組的增廣矩陣為 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{array}\right]$，經過矩陣列運算後化成 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & \beta \\ 1 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right]$，

試選出正確的選項。

(A) $\alpha=2$　(B) $\beta=5$　(C) $\gamma=3$　(D)此線性方程組無解

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -1 & -5 & -17 \\ 0 & -5 & -7 & -31 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -1 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 18 & 54 \end{bmatrix}$ ⇒ $z=3,\ y=2,\ x=1$ ⇒ $\alpha = x+y = 3$

$\beta = y+z = 5$

$\gamma = x+z = 4$ ⇒ (B)

---

9. 試計算 $\lim_{n\to\infty}(\frac{2^3+1}{2^3-1}\times\frac{3^3+1}{3^3-1}\times\frac{4^3+1}{4^3-1}\times\ldots\frac{n^3+1}{n^3-1})=$?

(A)0　(B)1　(C) $\frac{3}{2}$　(D) $\frac{9}{4}$

$\frac{a^3+1}{a^3-1} = \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)}$

原式 $= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \underbrace{\frac{k+1}{k-1}}_{①} \cdot \underbrace{\frac{k^2-k+1}{k^2+k+1}}_{②} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2}$.

(P.S.) for ②, consider

$m^2-m+1 = n^2+n+1 \Leftrightarrow m^2-n^2 = m+n$

$\Leftrightarrow m-n=1$ ⇒ 可相消

① ⇒ $\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{6}}{\cancel{4}} \cdots \frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n-3}}\cdot\frac{n}{\cancel{n-2}}\cdot\frac{n+1}{\cancel{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$

② ⇒ $\frac{3}{\cancel{7}}\cdot\frac{\cancel{7}}{\cancel{13}}\cdot\frac{\cancel{13}}{\cancel{21}} \cdots \frac{\cancel{(n-1)^2-(n-1)+1}}{(n-1)^2+(n-1)+1}\cdot\frac{\cancel{n^2-n+1}}{n^2+n+1} = \frac{3}{n^2+n+1}$

⇒ 原式 $= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{3}{n^2+n+1} = \frac{3}{2}$

⇒ (C)

10. 給定數列 $\langle a_n\rangle=\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{2}\\ a_n=3a_{n-1}-2(-1)^{n-1},n\geq 2\end{cases}$，試問 a_{114} 是幾位數？

(A)54　(B)55　(C)56　(D)57

$a_n+\alpha(-1)^n=3(a_{n-1}+\alpha(-1)^{n-1}) \Rightarrow 4\alpha(-1)^{n-1}=-2(-1)^{n-1} \Rightarrow \alpha=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a_n-\frac{1}{2}(-1)^n=3(a_{n-1}\cancel{-\frac{1}{2}(-1)^{n-1}})$

$\cancel{a_{n-1}-\frac{1}{2}(-1)^{n-1}}=3(a_{n-2}\cancel{-\frac{1}{2}(-1)^{n-2}})$

$\vdots$

$\times)\ a_2\cancel{-\frac{1}{2}(-1)^2}=3(a_1-\frac{1}{2}(-1)^1)$

$a_n=\frac{1}{2}(-1)^n+3^{n-1}\cdot(a_1+\frac{1}{2}) \Rightarrow a_{114}=3^{113}+\frac{1}{2}$

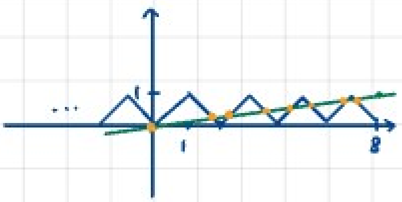
4771
113
14313
4771
4771
539123

$113\cdot\log 3\approx 53.9123$

$\Rightarrow 3^{113}$ 為54位數

11. 若 $f(x)=\begin{cases}x & ,0\leq x\leq 1\\ 2-x,1\leq x\leq 2\end{cases}$，且滿足 $f(x+2)=f(x)$，則 $y=f(x)$ 圖形與 $y=\frac{1}{8}x$ 圖形的交點有幾個？(A)8　(B)10　(C)12　(D)14

週期 2



8個交點 $\Rightarrow$ (A)

12. 下列有關 ΔABC 的敘述，試選出正確的選項。

(A)若 $0<\tan A\tan B<1$，則 ΔABC 為鈍角三角形

(B)若 $\sin A+\cos A=\frac{1}{4}$，則 ΔABC 為鈍角三角形

(C)若 $\sin A=\frac{1}{3}$ 且 $\cos B=\frac{1}{4}$，則 ΔABC 為銳角三角形

(D)若 $\sin A=\frac{5}{6}$ 且 $\sin B=\frac{4}{5}$，則 ΔABC 為銳角三角形

(A) $\tan C=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$，又 $\tan A\cdot\tan B>0 \Rightarrow \tan A>0, \tan B>0 \Rightarrow \tan C<0 \Rightarrow$ 鈍角 ✓

(B) $\sqrt{2}\sin(A+45^\circ)=\frac{1}{4} \Rightarrow \sin(A+45^\circ)=\frac{1}{4\sqrt{2}}<\sin 45^\circ$ or $\sin 135^\circ$

$\Rightarrow A+45^\circ\overset{\times}{<}45^\circ$ or $A+45^\circ>135^\circ \Rightarrow A>90^\circ \Rightarrow$ 鈍角 ✓

(C) note that $\cos(180^\circ-B)=-\frac{1}{4} \Rightarrow$ if $\cos A<0$, then $\cos A>-\frac{1}{4}$, but $\cos A=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cos A>0$

$\Rightarrow \cos C=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{4}>0 \Rightarrow A,B,C<90^\circ$

$\Rightarrow$ 銳角 ✓

(D) $\cos C=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\pm\frac{\sqrt{11}}{6}\cdot\frac{3}{5}>0$

$\Rightarrow$ 有可能 $\cos A = -\frac{\sqrt{11}}{6}$, $\cos B = \frac{3}{5}$, $\cos C = \frac{20+3\sqrt{11}}{30}$

check $\cos A > \cos(180^\circ - B) = -\frac{3}{5}$ $\Rightarrow$ OK $\Rightarrow$ 可能是鈍角 X

$\Rightarrow$ Ans: (A)(B)(C)

---

13. 下列有關函數極限的敘述，試選出正確的選項。

(A)設非零函數 $f(x)$ 滿足極限 $\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)+\frac{|x|}{x}\right)$ 存在，則極限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 必定不存在

(B)設非零函數 $f(x)$ 滿足極限 $\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)\cdot\frac{|x|}{x}\right)$ 存在，則極限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 必定不存在

(C)設非零函數 $f(x)$ 滿足極限 $\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)\cdot\frac{|x|}{x}\right)$ 存在，則極限 $\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)\right)^2$ 必定存在

(D)設 $[x]$ 為不大於實數 x 的最大整數，且非零函數 $f(x)$ 滿足極限 $\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)\cdot\frac{[x]}{x}\right)$ 存在，則極限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 必定存在

(A) if $\lim\limits_{x\to0} f(x) = L$ exists, then $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)+\frac{|x|}{x} = L+1 \neq L-1 = \lim\limits_{x\to0^-} f(x)+\frac{|x|}{x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x)+\frac{|x|}{x}$ DNE , $\Leftarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x)$ DNE V

(B) counter example: $f(x) = x \Rightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x)\cdot\frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to0}|x| = 0$ exists

X

but $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$ also exists

V

(C) if $\lim\limits_{x\to0} f(x)\cdot\frac{|x|}{x} = L$ exists, then $\lim\limits_{x\to0}(f(x))^2 = \lim\limits_{x\to0}\left(f(x)\cdot\frac{|x|}{x}\right)^2 = L^2$ also exists

(D) counter example : $f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2+1, & x>0 \end{cases}$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-} f(x)\cdot\frac{[x]}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to0^+} f(x)\cdot\frac{[x]}{x}$

X

but $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x)$ DNE

$\Rightarrow$ Ans: (A)(C)

---

14. 將 $\underbrace{333\cdots3}_{99個3}\times\underbrace{666\cdots6}_{99個6}$ 乘開，得一 n 位數，請問下列哪些選項是正確的?

(A) $n=199$ (B)個位數字為8 (C)最高位數字為1 (D)由左向右數來第100位數為7

$33\cdots3 = 3+3\times10+\cdots+3\times10^{98} = \frac{\cancel{3}\cdot(10^{99}-1)}{\cancel{9}\,3}$

$66\cdots6 = \frac{\cancel{6}^{\,2}\cdot(10^{99}-1)}{\cancel{9}\,3}$

$\Rightarrow$ 原式 $= \frac{2(10^{99}-1)^2}{9} = 2\times\overbrace{11\cdots11}^{99's}\times\overbrace{99\cdots99}^{99's}$

$\Rightarrow$ 原式 $= 2\times11\cdots11\times(1\overbrace{00\cdots00}^{99's}-1) = \overbrace{222\cdots22}^{99's}\overbrace{00\cdots00}^{99's} - \overbrace{22\cdots22}^{99's}$

$$\begin{array}{r} \overset{199\cdots9}{222\cdots2200\cdots00} \\ -\qquad 22\cdots22 \\ \hline 222\cdots2177\cdots78 \end{array}$$

198th　99th　1st

(A) $n=198$ ✗, (B) correct, trivial ✓

(C) 最高位 $=2$ ✗

(D) 左向右數100 = 右向左數99 ⇒ 所求 $=7$ ✓

⇒ Ans: (B)(D)

---

15. 三次曲線 $y=x^3+ax^2+1$，若由原點可作三條相異切線，試問實數a的值可以是下列何者？ (A) π (B) $\sqrt{2025}$ (C) $\log 114$ (D) $\dfrac{2025}{114}$

$f(x)=x^3+ax^2+1$, $f'(x)=3x^2+2ax$，設切點 $(x_0, f(x_0))$ ⇒ $L_{tp}: y=(3x_0^2+2ax_0)\cdot x$

⇒ $x_0^3+ax_0^2+1=(3x_0^2+2ax_0)\cdot x_0$ 有3相異IR解

⇒ $g(x)=2x^3+ax^2-1=0$ 有3相異IR解

$g'(x)=6x^2+2ax=2x(3x+a)$ ⇒ $g(0)\cdot g(-\frac{1}{3}a)<0$ ⇒ $g(-\frac{1}{3}a)>0$

⇒ $-\frac{2}{27}a^3+\frac{1}{9}a^3-1=\frac{1}{27}a^3-1>0$ ⇒ $a>3$ ⇒ Ans: (A)(B)(D)

---

16. 已知兩等比數列$\langle a_n\rangle=\langle 2,4,8,\ldots\rangle$，$\langle b_n\rangle=\langle 5,25,125,\ldots\rangle$，若將兩數列之所有數字混合後並由小至大重新排列後得到一個新的數列$\langle c_n\rangle=\langle 2,4,5,8,16,25,\ldots\rangle$，請選出正確的選項。

(A)數列$\langle c_n\rangle$中的各項均相異

(B) $a_{30}=c_{45}$

(C) $b_{10}=c_{30}$

(D)若 $a_{20}=c_k$，$a_{30}=c_{k+h}$，則 $h=14$

$$233\overset{12.}{\big)\overline{3010}} \quad \begin{array}{r}233\\ \hline 680\end{array} \qquad 301\overset{23}{\big)\overline{6990}} \quad \begin{array}{r}602\\ \hline 990\end{array}$$

(A) correct, trivial ✓

(B) $a_{30}=2^{30}$, find n s.t. $5^n<2^{30}<5^{n+1}$

$0.699n<9.030<0.699(n+1)$，$\frac{9030}{699}\doteqdot 12.$多 ⇒ n取12 ⇒ $30+12=42$

⇒ $a_{30}=c_{42}$ ✗

(C) $b_{10}=5^{10}$, find n s.t. $2^n<5^{10}<2^{n+1}$

$0.301n<6.990<0.301(n+1)$，$\frac{6990}{301}\doteqdot 23.$多 ⇒ n取23 ⇒ $b_{10}=c_{10+23}=c_{33}$ ✗

(D) $\underbrace{2^{20}, 2^{21}, \ldots, 2^{29}, 2^{30}}$, find n s.t. $2^{20} < 5^n < 2^{30}$

10個

$6.02 < 0.699n < 9.03 \Rightarrow 8.\cdots < n < 12.\cdots \Rightarrow n = \overbrace{9, 10, 11, 12}^{4個} \Rightarrow a_{30} = C_{k+10+4}$

$\Rightarrow n = 14$ ✓

---

17. 坐標平面上，圓 C 為三角形 ABC 的內切圓，若圓心為 O 且已知 $A(2,-4)$，

$\overleftrightarrow{OB}: x+y-2=0$，$\overleftrightarrow{OC}: x-3y-6=0$，則下列敘述何者正確？

(A) A 點對 $\overleftrightarrow{OB}$ 的對稱點 A' 必定在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上

(B) A 點對 $\overleftrightarrow{OB}$ 的對稱點 A' 為 $A'(8,-2)$

(C) $\overleftrightarrow{BC}: 2x+7y=2$

(D) 圓 C 的方程式為 $x^2+y^2-6x+2y+8=0$

(A) $\overleftrightarrow{OB}$ 為 $\angle ABC$ 角平分線 $\Rightarrow A' \in \overleftrightarrow{BC}$ ✓

(B) L方程: $x-y \overset{A}{=} 6 \Rightarrow H \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=6 \end{cases} \Rightarrow x=4, y=-2 \Rightarrow A'(6,0)$ ✗

(C) A點對 $\overleftrightarrow{OC}$ 做對稱得 A'' $\Rightarrow \overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{A'A''}$

L方程: $3x+y \overset{A}{=} 2 \Rightarrow H \begin{cases} x-3y=6 \\ 9x+3y=6 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{6}{5}, y=-\frac{8}{5} \Rightarrow A''(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$

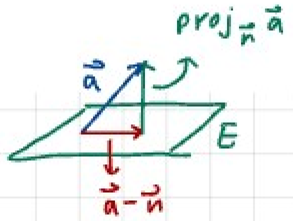
$\Rightarrow m_{BC} = \frac{4}{-28} = -\frac{1}{7} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC}: x+7y=6$ ✗

(D) $O \begin{cases} x+y=2 \\ x-3y=6 \end{cases} \Rightarrow y=-1, x=3 \Rightarrow O(3,-1)$

$r^2 = d(O, \overleftrightarrow{BC})^2 = \frac{|-10|^2}{50} = 2 \Rightarrow C: (x-3)^2+(y+1)^2=2$ ✓

---

1. 已知空間向量 $\overrightarrow{a}=(4,1,3)$，$\overrightarrow{b}=(2,3,1)$，$\overrightarrow{c}=(3,7,-1)$。若 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 所張成平面 E 上的正射影為 $x\overrightarrow{b}+y\overrightarrow{c}$，試求數對 $(x,y)=$ $\left(\frac{41}{15}, -\frac{14}{15}\right)$。



$\vec{b}=(2,3,1)$, $\vec{c}=(3,7,-1)$ $\Rightarrow \vec{n} = \vec{b}\times\vec{c} = (-10,5,5) \parallel (2,-1,-1)$

$proj_{\vec{n}}\vec{a} = \frac{\vec{n}\cdot\vec{a}}{|\vec{n}|^2}\cdot\vec{n} = \frac{4}{6}\cdot(2,-1,-1) = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

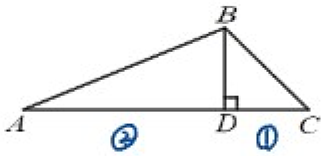
$\Rightarrow$ 正射影 $= \vec{a} - proj_{\vec{n}}\vec{a} = (\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{11}{3}) = x(2,3,1)+y(3,7,-1)$

$\begin{cases} 6x+9y=8 \\ 6x-6y=22 \end{cases}$

$\Rightarrow y = \frac{-14}{15}, x = y + \frac{11}{3} = \frac{41}{15}$

$\Rightarrow$ Ans: $(\frac{41}{15}, \frac{-14}{15})$

2. 如右圖（此為示意圖），ΔABC 中，$\angle A$ 與 $\angle C$ 皆為銳角，$\overline{BD}$ 為底邊 $\overline{AC}$ 的高，已知 $\frac{\Delta ABC\text{面積}}{\Delta BCD\text{面積}}=3$，試求 $\frac{2}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}+\frac{3}{\tan C}$ 的最小值



$=\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 。 $\frac{2}{3}\sqrt{19}$

∵ $\overline{AD}:\overline{DC}=2:1$ ∴ $\tan A:\tan C=1:2$，令 $\frac{1}{\tan A}=2k$，$\frac{1}{\tan C}=k$

⇒ $\tan B=-\tan(A+C)=\frac{-\left(\frac{3}{2k}\right)}{1-\frac{1}{2k^2}}=\frac{3k}{1-2k^2}$

A, C < 90° ⇒ k > 0

⇒ $\frac{2}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}+\frac{3}{\tan C}=4k+\frac{1-2k^2}{3k}+3k=\frac{19}{3}k+\frac{1}{3k}\geq 2\sqrt{\frac{19k}{3}\cdot\frac{1}{3k}}=\frac{2\sqrt{19}}{3}$ ⇒ Ans $=\frac{2\sqrt{19}}{3}$

---

3. 設 $[x]$ 為不大於實數 x 的最大整數，試求出 $\sum_{k=1}^{114}\left[\cos\frac{k\pi}{11}\right]$ 的值 = −50 。

$x=\cos\frac{\pi}{11}\sim\cos\frac{5\pi}{11}$ ⇒ $0<x<1$ ⇒ $[x]=0$

$x=\cos\frac{6\pi}{11}\sim\cos\frac{16\pi}{11}$ ⇒ $-1\leq x<0$ ⇒ $[x]=-1$

$x=\cos\frac{17\pi}{11}\sim\cos\frac{21\pi}{11}$ ⇒ $0<x<1$ ⇒ $[x]=0$

$x=\cos\frac{22\pi}{11}=1$ ⇒ $[x]=1$

一組 (22 項) sum of $[x]=-10$

$[x]=0$

$K=1\sim114$ ⇒ 共5組 + $\underline{\cos\frac{111\pi}{11}\sim\cos\frac{114}{11}\pi}$ ⇒ sum = −50 ⇒ Ans = −50

---

4. 數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $\log_{n+1}a_n=1+\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$，若 $\frac{a_n}{n+1}<1.2$，問 n 的最小值 = 12 。

0.4771
0.6020
~.0791

$791\overline{)10000}$ 12
791
2090

$\log_{n+1}a_n-1=\log_{n+1}\left(\frac{a_n}{n+1}\right)=\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$ ⇒ $\frac{\log\left(\frac{a_n}{n+1}\right)}{\cancel{\log(n+1)}}=\frac{1}{(n+1)\cancel{\log(n+1)}}$

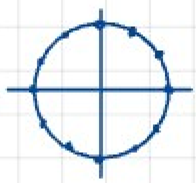
⇒ $\log\frac{a_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$ ⇒ $\frac{a_n}{n+1}=10^{\frac{1}{n+1}}<1.2$ ⇒ $\frac{1}{n+1}<\log 1.2\approx0.4771+0.6020-1$

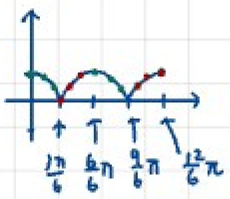
$=0.0791$

⇒ $n>\frac{1}{0.0791}-1\doteq 11.$多 ⇒ n 最小 12 ⇒ Ans = 12

---

5. 將區間 $[0,2\pi]$ 平分成12等分，則函數 $y=|\cos x|$ 在此區間內與x軸所圍成的區域面積之上和 $=\frac{3+\sqrt{3}}{3}\pi$ 。





$x_0=0$，$x_i=\frac{\pi}{6}i$，$i=1,2,\ldots,12$

for $i=1\sim3$，$7\sim9$ ⇒ 取左端點 •

$i=4\sim6$，$9\sim12$ ⇒ 右 •

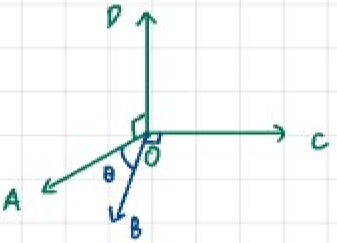
⇒ $U_n=\frac{\pi}{6}\times4(\cos30^\circ+\cos60^\circ+1)=\frac{2}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\sqrt{3}+3}{3}\pi$ #

⇒ Ans $=\frac{3+\sqrt{3}}{3}\pi$

6. 空間向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}$ 滿足 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ 、 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$ ，且 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=k\neq 0$ 。

求 $\overline{BD}=$ $k\sqrt{k^2+3}$ （以 k 表示）。

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OD}$ 、 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OD}$, $|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\sin 90^\circ=k^2$



$|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\angle AOB\Rightarrow\sin\angle AOB=\frac{1}{k}$

$\because\angle BOD=90^\circ+\theta$

$\therefore\overline{BD}^2=\overline{OB}^2+\overline{OD}^2-2\,\overline{OB}\,\overline{OD}\cos\angle BOD=k^2+k^4-2k^3\cdot\cos(90^\circ+\theta)$

$=k^2+k^4+2k^3\sin\theta=3k^2+k^4$

$\Rightarrow\overline{BD}=k\sqrt{k^2+3}$ # $\Rightarrow$ Ans $=k\cdot\sqrt{k^2+3}$

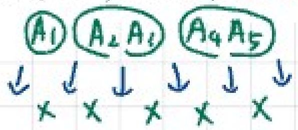
---

7. 試計算 $(\sqrt5+\sqrt6+\sqrt7)(\sqrt6+\sqrt7-\sqrt5)(\sqrt5+\sqrt7-\sqrt6)(\sqrt5+\sqrt6-\sqrt7)=$ 104 。

原式 $=\left[(\sqrt6+\sqrt7)^2-5\right]\left[\left((\sqrt5-\sqrt6)+\sqrt7\right)\left((\sqrt5+\sqrt6)-\sqrt7\right)\right]=\left[8+2\sqrt{42}\right]\left[-8+2\sqrt{42}\right]=168-64=104$

---

8. 將 10 張椅子排成一列，甲，乙，丙，丁，戊 5 人分成三組入座，三組人數分別為 1 人，2 人，2 人，若規定「同組的人相鄰，不同組的人不相鄰」（即各組間有空位）之坐法有 7200 種。



分組方法數 $=5\times C^4_2=30$

排列數 $\Rightarrow C^6_3\times\frac{3!}{2!}\times2!\times2!=20\times12$

$\Rightarrow$ 所求 $=30\times240=7200$ $\Rightarrow$ Ans $=7200$

---

9. 試計算 $1!\times1+2!\times2+\cdots+114!\times114$ 除以 2025 的餘數＝ 2024 。

$k\times k!=(k+1)\cdot k!-k!=(k+1)!-k!$

contains 5, 9, 45

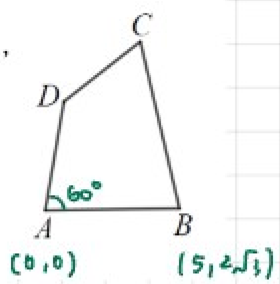
$\Rightarrow$ 原式 $=-1!+2!-2!+3!-\cdots-114!+115!=115!-1\equiv-1\equiv2024\pmod{2025}$ $\Rightarrow$ Ans $=2024$

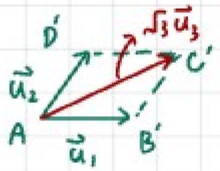
---

1. 如右圖(此為示意圖)，四邊形$ABCD$中，已知 $\overrightarrow{AB}=\left(5,2\sqrt3\right)$ ，$\overrightarrow{CD}=\left(-7,-\frac{\sqrt3}{3}\right)$ ，

$\vec u_1+\vec u_2=\sqrt3\,\vec u_3$

且 $\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\frac{\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{\sqrt3\,\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$ ，試求出四邊形$ABCD$的面積。





$\cos\angle AD'C'=\frac{1+1-3}{2\times1\times1}=-\frac12\Rightarrow\angle AD'C'=120^\circ\Rightarrow\angle DAB=\angle D'AB'=60^\circ$

$\overrightarrow{AD}=r\cdot R_{60^\circ}\cdot\overrightarrow{AB}\Rightarrow r(5+2\sqrt3 i)(\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i)=r(-\frac12+\frac72\sqrt3 i)\Rightarrow(-\frac12r,\frac72\sqrt3 r)$

$\overrightarrow{AC}=s\cdot R_{30^\circ}\,\overrightarrow{AB}\Rightarrow s(5+2\sqrt3 i)(\frac{\sqrt3}{2}+\frac12 i)=s(\frac32\sqrt3+\frac{11}{2}i)\Rightarrow(\frac32\sqrt3 s,\frac{11}{2}s)$

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}s + \frac{1}{2}r, \frac{11}{2}s - \frac{7}{2}\sqrt{3}r\right) = \left(7, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\sqrt{3}s + r = 14 \\ 11s - 7\sqrt{3}r = \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 63s + 7\sqrt{3}r = 98\sqrt{3} \\ 11s - 7\sqrt{3}r = \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{array} \Rightarrow s = \frac{1}{74} \cdot \frac{296}{3}\sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

$r = 14 - 3\sqrt{3}s = 14 - 12 = 2$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD} = (-1, 7\sqrt{3}) \\ \overrightarrow{AC} = \left(6, \frac{22}{3}\sqrt{3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Area} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 5 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & \frac{22}{3}\sqrt{3} & 7\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix}\right|$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{110}{3}\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 42\sqrt{3} + \frac{22}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{74}{2}\sqrt{3} = 37\sqrt{3}$ #

---

2. 計算 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1-x^{100}}{1-x}-100\right)$。

$x^{100} - 1 = (x-1)(x^{99} + x^{98} + \cdots + x + 1)$

$\Rightarrow$ 原式 $= \lim_{x\to 1} \frac{x^{99} + x^{98} + \cdots + x - 99}{x-1} = \lim_{x\to 1} 99x^{98} + 98x^{97} + \cdots + 2x + 1$

$= 99 + 98 + \cdots + 1 = \frac{1}{2} \times 100 \times 99 = 4950$ #

---

3. 試求 $y=\frac{\cos x+2\sin x}{2+\cos x}$ 的最大值與最小值。

$y = \frac{\cos x + 2\sin x}{2 + \cos x} = k \Rightarrow \cos x + 2\sin x = 2k + k\cos x$

$\Rightarrow 2k = (1-k)\cos x + 2\sin x = \sqrt{k^2 - 2k + 5} \cdot \sin(x + \theta)$

$\Rightarrow -\sqrt{k^2 - 2k + 5} \leq 2k \leq \sqrt{k^2 - 2k + 5}$

$\Rightarrow 4k^2 \leq k^2 - 2k + 5 \Rightarrow 3k^2 + 2k - 5 \leq 0 \Rightarrow (3k+5)(k-1) \leq 0 \Rightarrow -\frac{5}{3} \leq k \leq 1$

$\Rightarrow \text{Max} = 1, \text{min} = -\frac{5}{3}$ #