桃園市立內壢高級中等學校114學年度教師甄選

科目：數學科

說明：本試卷共分選擇題、非選擇題兩部份。第一部份：填充題占40%；第二部份：計算證明題占60%。請使用藍色或黑色原子筆或鋼筆書寫填答於「答案本」上，依題號作答，修正時應使用修正液(帶)。答案本 因考生書寫不清、污損等人為因素導致無法批改，由考生自行負責不得有異議。於試題卷上作答者，不予計分。本試題卷連同答案本一併交回，違規攜出試場者以零分計算。

第一部份：填充題（共 8 題，占 40 分）

說明：作答時請將答案依照順序寫在答案本上。本部分1到7題只考慮實數系。

1. 若 $(x-\sqrt{x^2-2011})(y+\sqrt{y^2-2011})+2011=0$, 則 $2x+y=$ ________ 。

2. $C_0^{1001}-\frac{1}{2}C_1^{1001}+\frac{1}{3}C_2^{1001}+\cdots+\frac{(-1)^{1001}}{1002}C_{1001}^{1001}=$ ________ 。

3. 找出所有可能的k值使得函數$f(x)=x^3+2x^2+kx-1$ 是具有反函數的(提示:題意即判斷$f(x)$何時是一對一函數)

   答案: k值的範圍為 ________ 。

4. $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx=$ ________ 。

5. 設 x 為整數，且 $\dfrac{x^3-x+360}{(x-1)(x+1)}$ 亦為整數，則符合條件的最大整數 x 為________。

6. 空間坐標中有三個點 $O(0,0,0)$，$A(0,1,1)$，$P(x,y,0)$，點P在空間中移動使得 $\angle OAP=30°$且 $y\geq 0$，若 $x(y+1)$ 的最大值為 M 且最小值為 m，則數對 (M,m) =____________________。(全對才給分)

7. 設有一顆正六面體骰子，其中三面塗成黃色，兩面塗成藍色，最後一面塗成紫色，投擲時每一面出現的機率相同，若投擲此骰子5次，紀錄黃色、藍色、紫色出現的次數各別為 x,y,z 次(其中 $x+y+z=5$)，則次數乘積 xyz 的期望值為_____________。

8. 設實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1+i)=5$ 與 $f(i)=10$，其中 $i=\sqrt{-1}$，且 $f(x)$ 除以 $(x^2-2x+2)(x^2+1)$ 的餘式為 $g(x)$，則 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{g(x)-5}{2x+1}$ 的值為_________。

第二部份：計算證明題（共 6 題，占 60 分）

說明：每大題10分(需有計算過程只寫答案不給分)

作答時請將答案依照順序寫在答案本上。本部分1到5題只考慮實數系。

1. 國中數學與高中數學的連結:

(a)請利用國中數學所學二次方程式的根與判別式的關係證明 :

若 x_1,x_2,x_3 皆不為零且 y_1,y_2,y_3 為任意數 則我們有柯西不等式(Cauchy inequality)

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\ge(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2$$

(b)請利用國中數學乘法公式範疇中的 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的因式分解公式證明:

若 $x_1,x_2,x_3\ge 0$ 則我們有算幾不等式

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\ge\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

2. 證明

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收斂 $\Leftrightarrow p>1$

(註:若有引用定理於證明中必須加以敘述)

3. 若 $x=15!$(即15的階乘數) 且 n=323, 求 x 被n除後的餘數。

4. 設 a_1,a_2,a_3,a_4 為兩兩互質的整數，且 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}=n$ 為整數，試求所有符合題意的 n 值。

5. 設 a,b 為整數，且 $2\le a\le b\le 2025$，並且滿足方程式 $a^{\log_b\left(a^{-32}\right)}=b^{\log_a\left(ba^{-6}\right)}$，則所有符合條件的數對 (a,b) 共有幾組？

6. 設 ω 為複數，且 $|\omega|=5$，有一正實數 $\lambda>1$，使得 $\omega,\omega^2,\lambda\omega$ 這三個複數，在複數平面上形成一個正三角形，試求 λ 的值。