新 竹 市 立 香 山 高 級 中 學 114 學 年 度 教 師 甄 選

科目：高中數學科

一、單選題(每題 5 分，共計 50 分)

1. (D) 設 a,b 為正數，如果方程式 $x^2+ax+2b=0$ 與 $x^2+2bx+a=0$ 的解都是實數，則滿足上述條件的 $a+b$ 之最小值為下列何者？

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

2. (A) 試求極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{n+(n-1)}+\dfrac{1}{n+n}\right)$ 之值為下列何者?

(A) $\ln 2$ (B) $2\ln 2$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 1 (E) 2

3. (D) 已知導函數 $f'(0)=3$，則極限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)-f(\sin x)}{x}$ 之值為下列何者？

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 9

4. (E) 已知 A 為一個十位數，其數字由左至右分別為 a_1、a_2、…、a_{10}，其中 $a_1=1$，而 a_2、a_3、…、a_{10} 皆為 0 或 1，且滿足 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$，則滿足這樣條件的 A 之個數為下列何者?

(A) 122 (B) 123 (C) 124 (D) 125 (E) 126

5. (B) 設 n 為正整數，如果 $2000<C_1^n+C_2^n+C_3^n+\cdots+C_n^n<3000$，則 n 之值為下列何者?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

6. (C) 試問 $\log(\tan 1°)+\log(\tan 2°)+\log(\tan 3°)+\cdots+\log(\tan 88°)+\log(\tan 89°)$ 之值為下列何者?

(A) -1 (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\dfrac{1}{2}$ (E) 1

7. (D) 在 ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=2$，如果 $\overline{BC}$ 邊上有 100 個相異的點 P_1、P_2、…、P_{100}，且設 $a_k=\overline{AP_k}^2+\overline{BP_k}\cdot\overline{P_kC}$，其中 $k=1,2,\cdots,100$，則 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}$ 之值為下列何者?

(A) 100 (B) 200 (C) 300 (D) 400 (E) 600

8. (D) 試問 $\cos^2 80^\circ+\cos^2 160^\circ+\cos 80^\circ\cos 160^\circ$ 之值為下列何者?

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{3}{8}$ (D) $\dfrac{3}{4}$ (E) $\dfrac{5}{4}$

9. (B) 試問極限值 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$ 之值為下列何者?

(A) 0 (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{1}{2}$ (E) 1

10. (C) ΔABC 中，已知 D 為邊 $\overline{BC}$ 上一點，使得 $\angle CAD=\angle DAB=60°$；如果 $\overline{AB}=4,\ \overline{AC}=2$，則 $\overline{AD}$ 之長為下列何者?

(A) $\dfrac{2}{3}$ (B) 1 (C) $\dfrac{4}{3}$ (D) $\dfrac{5}{3}$ (E) 2

二、多選題(每題 7 分，共計 35 分;每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項)

1. (**BE 或 E**) 設 p,q,r 為質數，如果 p 整除 $qr-1$，q 整除 $rp-1$，且 r 整除 $pq-1$，則下列哪些選項是正確?

(A) $q-p=4$ (B) $r-p=3$ (C) $p+q+r=23$ (D) pqr 可整除 $pq+qr+rp$ (E) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-\frac{1}{pqr}=1$

2. (ACE) 設 A 為 n 階方陣，以符號 $\det(A)$ 表示方陣 A 的行列式，則下列哪些敘述恆正確?

(A) 如果 $\text{rank}(A)<\text{n}$，則 $\det(A)=0$

(B) 如果矩陣 B 為將矩陣 A 中的某一列乘以一個非零之常數 c，且 $c\neq 1$，則 $\det(B)=\det(A)$

(C) 如果 B 為 n 階方陣，則 $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$

(D) 如果 B 為 n 階方陣，則 $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$

(E) 如果 A 為 n 階可逆方陣，$\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}$。

3. (CE) 已知 a,b 為實數，且 $a\neq 0$，如果一多項式 $f(x)$ 除以 $ax+b$，得商式 $q(x)$，餘式為 r，其中 r 為實數，則下列哪些選項是正確的？

(A) $f(x)$ 除以 $x+\frac{b}{a}$，得商 $q(x)$，餘式為 r

(B) $xf(x)$ 除以 $ax+b$，得商 $xq(x)-\frac{r}{a}$，餘式為 $\frac{br}{a}$

(C) $xf(x)$ 除以 $ax+b$，得商 $xq(x)+\frac{r}{a}$，餘式為 $-\frac{br}{a}$

(D) $x^2f(x)$ 除以 $ax+b$，得商 $x^2q(x)+\frac{r}{a}x+\frac{br}{a^2}$，餘式為 $-\frac{b^2r}{a^2}$

(E) $x^2f(x)$ 除以 $ax+b$，得商 $x^2q(x)+\frac{r}{a}x-\frac{br}{a^2}$，餘式為 $\frac{b^2r}{a^2}$

4. (BDE) 已知 a,b,c,d 為正整數，如果 $a^5=b^4, c^3=d^2$，且 $c-a=19$，則下列哪些選項是正確?

(A) $c=99$ (B) $b-a=162$ (C) $b-c=141$ (D) $d-a=919$ (E) $a+b-c=224$

5. (ACD) 已知 $\sqrt{6}$ 的整數部分是 a，小數部分是 b，且 n 為正整數，如果 $na+\frac{5}{b}$ 的整數部分是 2025，則下列哪些選項是正確?

(A) $b=\sqrt{6}-2$ (B) $b=3-\sqrt{6}$ (C) $\frac{5}{b}$ 的整數部分是 11 (D) $n=1007$ (E) $n=1008$

三、填充題(每題 5 分，共計 15 分) 請於答案卷 作答

1. 已知正整數 m,n 滿足 $n=\sqrt{m-184}+\sqrt{m+24}$，當 n 有最大值時，則 m 之值為___2785____。

2. 已知一圓的圓心為 O 點，且 $\overline{AB}$ 為此圓的直徑，如果 $\overline{CD}$ 為一弦且垂直 $\overline{AB}$ 於 E 點，且 $\overline{CD}\neq\overline{AB}$。又 $\overline{AB}$ 的長度為二位整數，$\overline{CD}$ 的長度正好是此二位數的個位數字與十位數字互換位置，且 $\overline{OE}$ 的長度為正有理數，則 $\overline{AB}$ 的長度為___65___。

3. 在 ΔABC 中，如果 $\overline{AB}=\overline{AC}$，且 $\angle A=108°$，則 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ 之比值為___$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$___。