國立台灣師範大學
附屬 高 級 中 學　114 學年度 第 2 次　專任教師甄選數學科筆試 【題目卷】

一、 **選填題**（每題 5 分，共 80 分。填在**答案卡**上，須以**最簡**分數、**最簡根式**作答，否則不予計分）

A. 設 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$ ，且 $x\neq 0$。若 $f(a)=4$ ，$f(b)=3$，則 $f(a+b)=\dfrac{①②}{③}$ 。

B. 在坐標平面上，不等式 $\log_{(x+y)}x<\log_{(x+y)}\sqrt{1-y^2}$ 的解所構成區域的面積為 $\dfrac{④}{⑤}+\dfrac{⑥}{⑦}\pi$ 。

C. 已知 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，若 P 點為圓 C：$(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上一點，設 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 的最小值為 m，最大值為 M，則 $M+m=$ ⑧⑨⑩ 。

D. 設△ABC 中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊分別為 a、b、c，若 $a^2+b^2=8c^2$，則 $\dfrac{\tan C}{\tan A}+\dfrac{\tan C}{\tan B}$ 之值為 $\dfrac{⑪}{⑫}$ 。

E. 若 α,β,γ 為 $x^3-4x-2=0$ 的三根， 則 $\alpha^6+\beta^6+\gamma^6=$ ⑬⑭⑮ 。

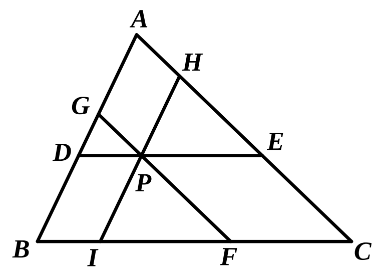
F. 設多項式 $f(x)$ 的次數為 23，若 $f(k)=\dfrac{1}{k}$ ，$k=1,2,3,\ldots,23$，則 $f(-2)=\dfrac{⑯⑰⑱}{⑲}$ 。

G. 設空間中兩直線 L_1：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{3}=z+3$ 與 L_2：$\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z+2}{-1}$，已知直線 L 過點 $P(1,2,-1)$，且與 L_1、L_2 分別交於 A、B 兩點，則 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\dfrac{⑳}{㉑}$ 。

H. 在坐標空間中四面體$P-ABC$，已知 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$，且 $A(4,-1,0)$，$B(2,1,2)$，$C(0,1,4)$，P點在平面ABC的正射影點爲Q ，則Q點的坐標爲 (㉒,㉓㉔,㉕) 。 。

I. 設一拋物線的頂點坐標爲 $V(-1,3)$，且對稱軸的方程式爲 L：$2x+y-1=0$。若此拋物線通過點$A(3,3)$，試求此拋物線的正焦弦長爲 $\dfrac{㉖㉗\sqrt{㉘}}{㉙}$ 。

J. 如圖，$\triangle ABC$內部有一點 P，$\overline{DE}$、$\overline{FG}$、$\overline{HI}$都過 P 點，長度都是 d，且分別平行於 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$。若 $\overline{AB}=380$、$\overline{BC}=520$、$\overline{CA}=494$，求 $d=$ ㉚㉛㉜ 。



K. 已知 P,Q,R 爲橢圓 $4x^2+y^2=72$ 上的三個相異點，若 P 點坐標爲 $(-3,6)$，則當 $\triangle PQR$ 有最大面積時，此時的 $\overline{QR}$ 長爲 ㉝$\sqrt{㉞㉟}$ 。

L. 從方程式 $x^{20}=18-10\sqrt{7}i$ 的所有複數根中，任取相異兩根令爲 α、β，則 $|\alpha-\beta|<\sqrt{1+2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 的機率爲 $\dfrac{㊱}{㊲㊳}$ 。

M. 坐標平面上，圓 $C:x^2+y^2-6y+1=0$，二次函數 $y=f(x)=kx^2$ 的圖形與圓 C 分別在第一象限、第二象限各相切於 P、Q 兩點。若圓 C 的下半圓弧與 $y=f(x)$ 的上方所圍成的封閉區域爲 R，則將R繞 x 軸旋轉所形成的旋轉體體積爲 $a\pi^2+b\pi+c$ 立方單位，試求 $3a+b+c=$ $\dfrac{㊴㊵}{㊶㊷}$ 。

N. 正整數a，b，c 滿足 $abc=2a+2b+2c$，求有序組 (a,b,c) 共有 ㊸㊹ 種可能。

O. 化簡 $\dfrac{1\times2\times20\times21+2\times3\times19\times20+3\times4\times18\times19+\cdots+20\times21\times1\times2}{1\times2+2\times3+\cdots+21\times22}=$ ㊺㊻ 。

P. 數列 $\langle x_n\rangle$ 滿足 $x_1=\dfrac{1}{20}$，$x_{k+1}=\dfrac{1}{3}x_k^2+x_k$，求 $\dfrac{1}{x_1+3}+\dfrac{1}{x_2+3}+\cdots+\dfrac{1}{x_{2025}+3}$ 的整數部分爲 ㊼㊽ 。

二、 **非選題**（共 20 分。請用**黑色**或**藍色**原子筆寫在**作答卷**上，須詳述過程，否則酌予扣分）

1. 求證：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，除了利用課本介紹「數學歸納法」的證明之外，請再給出三種**不同**於「數學歸納法」的證明。(完整給出第一種證法得 4 分，完整給第二、三種證法再各得 3 分)

2. 有一道數學問題：

試求極限值 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{n+1}{n})+(\frac{n+1}{n})^2+\cdots+(\frac{n+1}{n})^n}{n}=$__________。

小藍的解法如下：

所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}(\frac{n+1}{n})+\frac{1}{n}(\frac{n+1}{n})^2+\cdots+\frac{1}{n}(\frac{n+1}{n})^n\right)$，
因爲 $\frac{1}{n}(\frac{n+1}{n})^k=\frac{(n+1)^k}{n^{k+1}}$，分母次數都大於分子次方，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{n^{k+1}}=0$
因此極限值 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\frac{n+1}{n})+(\frac{n+1}{n})^2+\cdots+(\frac{n+1}{n})^n}{n}=0$

小天的解法如下：

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^2=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^2=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^3=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^3=1$，$\cdots$
依此類推，分子有 n 個1相加，因此極限值 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1$

請問：**(1)** 小藍與小天兩人的答案是否正確？若有錯誤，請指出錯誤之理由。(4 分) 請解出正確答案，並闡述如何引導學生做出正確思考。(4 分)

(2) 在授課「數列的極限」時，學生除了上述的可能迷思，請另外舉例一道試題說明學生在學習時容易犯的不同謬誤，並闡述如何引導學生做出正確思考。(2 分)

三・ **非選題**（共 20 分。請用**黑色**或**藍色**原子筆寫在**作答卷**上，須詳細過程，否則酌予扣分）

1. (10 分)

2. (10 分)

國立台灣師範大學
附屬 高 級 中 學　114 學年度 第 2 次　專任教師甄選數學科筆試 【參考解答】

一、選填題（ 80% 每題5分，共16題 ）

題號	答案	格號	選填
A.	$\frac{13}{7}$	①	1
		②	3
		③	7
B	$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\pi$	④	1
		⑤	2
		⑥	1
		⑦	8
C	120	⑧	1
		⑨	2
		⑩	0
D	$\frac{2}{7}$	⑪	2
		⑫	7
E	140	⑬	1
		⑭	4
		⑮	0

題號	答案	格號	選填
F	$\frac{299}{2}$	⑯	2
		⑰	9
		⑱	9
		⑲	2
G	$\frac{5}{6}$	⑳	5
		㉑	6
H	$(1,-4,3)$	㉒	1
		㉓	−
		㉔	4
		㉕	3
I	$\frac{16\sqrt{5}}{5}$	㉖	1
		㉗	6
		㉘	5
		㉙	5
J	304	㉚	3
		㉛	0
		㉜	4

題號	答案	格號	選填
K	$3\sqrt{15}$	㉝	3
		㉞	1
		㉟	5
L	$\frac{8}{19}$	㊱	8
		㊲	1
		㊳	9
M	$\frac{28}{15}$	㊴	2
		㊵	8
		㊶	1
		㊷	5
N	15	㊸	1
		㊹	5
O	48	㊺	4
		㊻	8
P	19	㊼	1
		㊽	9