2025.5.1(四)~5.2(五)

新北市公立高級中等學校 114 學年度教師聯合甄選
數學科試題

一、填充題：共 10 題，每題 7 分。

8 1. 已知實數 x,y 滿足 $\log_2(x+1)+\log_2(y+1)=4$ 以及 $xy-x-y=-1$，則 $x+y$ 之值為__________。

$\boxed{1}$ $(x-1)(y-1)=0$ $(x+1)(y+1)=16$

$(1+1)(7+1)$

↳ $x+y=8$

182 2. 有 8 位數學系學生（座號分別為 1 到 8）及 5 位物理系學生（座號分別為 9 到 13）。若將這 13 人分成無次序之分的兩組，任兩位座號相鄰的物理系學生不能分到同一組，且兩組之間，數學系學生的人數差不超過 2，則總共有__________種不同的分組方式。

$\boxed{2}$ 物理系分兩組 9,11,13 | 10,12 數學系

4人 4人 $\frac{C^8_4C^4_4}{2!}2!=70$

5人 3人 $C^8_5C^3_3\cdot 2!=112$ → 182

8 3. 已知 $f(x)=x^4-6x^2+\alpha x+(5-\alpha)$ 有三重根，則實數 α 的所有可能值為__________。

$\boxed{3}$ 4根：$\square,\square,\square,\triangle=-3\square$ $3\square^2-3\square(3\square)=-6$ $-3\square^4=5-\alpha$

$3\square+\triangle=0$ $\Rightarrow \square^2=1$ $\Rightarrow \alpha=8$

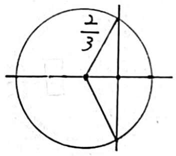
$\frac{4\pi}{27}-\frac{\sqrt3}{9}$ 4. 在複數平面上所有滿足不等式 $2|z|<|z-1|$，且實部大於 0 的點所形成的圖形，其面積為__________。

$\boxed{4}$ 令 $z=a+bi$

$4(a^2+b^2)<((a-1)^2+b^2)$

$\Rightarrow 3a^2+3b^2+2a-1<0$

$\Rightarrow (a+\frac13)^2+b^2<\frac49$



$\frac12\cdot\frac49\cdot\frac23\pi-\frac13\cdot\frac{\sqrt3}{3}$

$=\frac{4}{27}\pi-\frac{\sqrt3}{9}$

1.8125 5. 將 6 顆編號 1 至 6 的球分別放進四個盒子，編號 1 的球放進第一個盒子，編號 2 和編號 3 的球放進第二個盒子，編號 4 和編號 5 的球放進第三個盒子，編號 6 的球放進第四個盒子。若重複隨機抽取一個盒子（每個盒子被抽到的機率均等），再從這個盒中隨機抽取一顆球（每顆球被抽到的機率均等）。進行兩次這樣的試驗，則過程中看到不同編號球之數量期望值為__________（四捨五入到小數點後第四位）。

$\boxed{5}$

法1: $P(A_1)=P(A_6)=\frac14$

$P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)=P(A_5)=\frac14\cdot\frac12=\frac18$

$2-\frac14\times\frac14\times2-\frac18\times\frac18\times4=\frac{29}{16}$

法2: 2同 $X=1$　2異 $X=2$

P(2異)

$E=1+(\frac14\times\frac34\times2+\frac18\times\frac78\times4)$

$=1+\frac{13}{16}=\frac{29}{16}$

$P(2同)=\frac14\cdot\frac14\cdot2+\frac18\cdot\frac18\cdot4=\frac{3}{16}$

or $E=1\times\frac{3}{16}+2\times\frac{13}{16}=\frac{29}{16}$

-23 6. 若方程式 $x^5+x^2+1=0$ 之五根為 r_1,r_2,r_3,r_4,r_5，令 $P(x)=x^2-2$，則 $P(r_1)P(r_2)P(r_3)P(r_4)P(r_5)$ 之值為__________。

$\boxed{6}$ $f(\sqrt2)f(-\sqrt2)=(4\sqrt2+3)(-4\sqrt2+3)=-23$

6 7. 已知函數 f 在其定義域中滿足 $f\left(\frac{x+b}{x-2}\right)=\frac{x+a}{2x+1}$，對所有 $x\neq 2$ 及 $x\neq -\frac{1}{2}$ 都成立，其中 a,b 為常數。若 $\lim_{y\to\infty} f(y)=1$ 且 $\lim_{y\to 0} f(y)=0$，則 $a+b=$ ________。 $\Rightarrow a+b=3+3=6$

$\boxed{7}$ $y=\frac{x+b}{x-2}\Rightarrow x=\frac{2y+b}{y-1}$ $f(y)=\frac{(a+2)y+b-a}{5y+2b-1}$ $\begin{cases} b-a=0 \\ \frac{a+2}{5}=1\end{cases}$

$4\nmid 14$

268 $\Rightarrow \frac{4\times 67}{n^2+3}\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow n=1$ or -1 or $n=8$ or -8 不合

$67\nmid 77$

1, 8 8. 已知 $\frac{n^5+2n^2+1}{n^2+3}$ 為整數，則所有可能的整數 n 為________。

$\boxed{8}$ $2+\frac{n^5-5}{n^2+3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow (n^2+3)\mid(n^5+3n^3-(n^5-5))\Rightarrow(n^2+3)\mid(3n^3+5-(3n^3+9n))\Rightarrow\begin{cases}(n^2+3)\mid(9n-5)\times 5\\(n^2+3)\mid(9n^2-5n)\times 9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(n^2+3)\mid(81n^2-25)\\(n^2+3)\mid(81n^2+243)\end{cases}$

9. 將 1、2、3、4、5、6、7 這七個數字作適當的排列，使得相鄰兩數之和為質數。求

24 共有________種排列方式。 $1\ \underline{4}\ 3\ \underline{\cancel{6}\,2}\ 5\ \underline{\cancel{4}\,6}\ 7$ 先排奇數 $\to 4!=24$

偶數固定

$\boxed{9}$ 奇：1, 3, 5, 7 $\quad \underset{\times}{3,6}\quad\underset{\times}{5,4}\quad\underset{\times}{7,2}$

偶：2, 4, 6

$-\frac{1}{3}$ 10. 無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\cos\frac{n\pi}{3}$ 之值為

$\boxed{10}$ $S=1\cdot\frac{z}{2}+2\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^2+3\left(\frac{z}{2}\right)^3+\cdots=\frac{z}{2}\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)$

令 $z=e^{i\left(\frac{2\pi}{6}\right)}$

$=\frac{\frac{z}{2}}{\left(1-\frac{z}{2}\right)^2}=\frac{2z}{(z-2)^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{z\cdot z}{\bar{z}\cdot z}=\frac{2}{3}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

$\left(\frac{1}{2}-2+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{6}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ $=3\bar{z}$

$\Rightarrow\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{-1}{3}$ #

二、計算題：共 3 題，每題 10 分。

54 1. 已知 $C_k^n=\frac{n!}{k!(n-k)!}$，考慮所有滿足 $C_2^n-C_2^m=2025$ 的正整數 n,m，求 $n-m$ 的最大值。

$\boxed{1}$ $\frac{n(n-1)-m(m-1)}{2}=2025\Rightarrow(n-m)(n+m-1)=2\times 3^4\times 5^2$ $\quad(2\times 27)<(75)$

$n-m<n+m-1$ $\quad\max=54$

64 2. 已知對任意的正實數 $a_1,a_2,\ldots,a_n$，滿足下列不等式恆成立：$a_1+2a_2+\cdots+na_n<2025+\left(a_1+a_2^2+\cdots+a_n^n\right)$，求 n 的最大值。

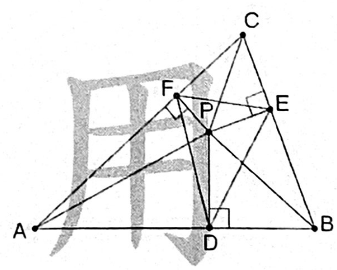
$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}(k-1)=1+2+\cdots+(n-1)<2025$

$\boxed{2}$ 令 $f(x)=kx-x^k$，$f'(x)=k(1-x^{k-1})=k(1-x)(1+x+\cdots+x^{k-2})$ $\Rightarrow n(n-1)<4050$

當 $x>0$，恆正 當 $x=1$ 有 max $\Rightarrow n$ 的 max $=64$

$$\begin{array}{r|l} & 63 \\ 6 & 4050 \\ 6 & 36 \\ 123 & 450 \end{array}$$

3. 設 P 是三角形 ABC 內一點，滿足 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA$。設 D,E,F 分別是 P 到 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA}$ 三邊的垂足。試證：三角形 DEF 與三角形 ABC 相似。



BDPE 共圓 $\Rightarrow\angle PDE=\angle PBC=\angle PAB$

ADPF 共圓 $\Rightarrow\angle PDF=\angle PAC$

$\Rightarrow\angle FDE=\angle PDE+\angle PDF$

$=\angle PAB+\angle PAC=\angle A$

同理 $\angle DEF=\angle ABC$

(AA 相似)