

新北市公立高級中等學校 114 學年度教師聯合甄選
數學科試題

一、填充題：共 10 題，每題 7 分。

1. 已知實數 x, y 滿足 $\log_2(x+1) + \log_2(y+1) = 4$ 以及 $xy - x - y = -1$ ，則 $x+y$ 之值為 _____。 (X-1)(Y-1)=0 (X+1)(Y+1)=16

II

$$\begin{array}{c} (x+1)(y+1) \\ \hline (1+1)(1+1) \\ \hookrightarrow x+y=8 \end{array}$$

2. 有 8 位數學系學生（座號分別為 1 到 8）及 5 位物理系學生（座號分別為 9 到 13）。

若將這 13 人分成無次序之分的兩組，任兩位座號相鄰的物理系學生不能分到同一組，且兩組之間，數學系學生的人數差不超過 2，則總共有 _____ 種不同的分組方式。物理系分兩組

II

9, 11, 13 10, 12

$$\begin{array}{l} 4\text{人} \quad 4\text{人} \quad \frac{C_4^8 C_4^4}{2!} = 70 \\ 5\text{人} \quad 3\text{人} \quad C_5^8 C_3^3 \cdot 2! = 112 \end{array} \rightarrow 182$$

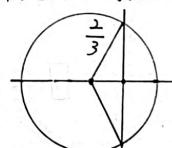
3. 已知 $f(x) = x^4 - 6x^2 + \alpha x + (5 - \alpha)$ 有三重根，則實數 α 的所有可能值為 _____。

$$\begin{array}{l} 4\text{根: } \square \square \square \square, \Delta = 3\square \quad 3\square^2 - 3\square(3\square) = -6 \quad \rightarrow \square^4 = 5 - \alpha \\ \square + \Delta = 0 \quad \Rightarrow \square^2 = 1 \quad \Rightarrow \alpha = 8 \end{array}$$

4. 在複數平面上所有滿足不等式 $2|z| < |z-1|$ ，且實部大於 0 的點所形成的圖形，其面積為 _____。

$$\frac{4\pi}{27}\sqrt{3} \quad \frac{4(\alpha^2 + b^2)}{4} < ((\alpha - 1)^2 + b^2) \Rightarrow (\alpha + \frac{1}{3})^2 + b^2 < \frac{4}{9}$$

$$\boxed{4} \text{ 令 } z = \alpha + bi \quad \Rightarrow 3\alpha^2 + 3b^2 + 2\alpha - 1 < 0$$



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{4}{27}\pi - \frac{\sqrt{3}}{9}$$

5. 將 6 顆編號 1 至 6 的球分別放進四個盒子，編號 1 的球放進第一個盒子，編號 2 和編號 3 的球放進第二個盒子，編號 4 和編號 5 的球放進第三個盒子，編號 6 的球放進第四個盒子。若重複隨機抽取一個盒子（每個盒子被抽到的機率均等），再從這個盒中隨機抽取一顆球（每顆球被抽到的機率均等）。進行兩次這樣的試驗，則過程中

看到不同編號球之數量期望值為 _____ (四捨五入到小數點後第四位)。

$$\boxed{5} \quad P(A_1) = P(A_6) = \frac{1}{4}$$

$$2 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 2 - \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times 4 = \frac{29}{16}$$

$$\text{法2: } 2 \boxed{5} \quad 2 \frac{9}{16}$$

$$X=1 \quad X=2$$

$$P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

6. 若方程式 $x^5 + x^2 + 1 = 0$ 之五根為 r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 ，令 $P(x) = x^2 - 2$ ，則 $P(r_1)P(r_2)P(r_3)P(r_4)P(r_5)$ 之值為 _____。

$$E = \left| + \frac{13}{16} \right| = \frac{29}{16}$$

$$\boxed{6} \quad f(\sqrt{2})f(-\sqrt{2}) = (4\sqrt{2} + 3)(-4\sqrt{2} + 3) = -23$$

$$\begin{aligned} P(-\sqrt{2}) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \\ &\quad + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

$$E = 1 \times \frac{3}{16} + 2 \times \frac{13}{16} = \frac{29}{16}$$

6. 已知函數 f 在其定義域中滿足 $f\left(\frac{x+b}{x-a}\right) = \frac{x+a}{2x+1}$ ，對所有 $x \neq 2$ 及 $x \neq -\frac{1}{2}$ 都成立，其中 a, b 為常數。若 $\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = 1$ 且 $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 0$ ，則 $a+b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 $\Rightarrow a+b=3+3=6$ 4/14

$$\boxed{7} \quad y = \frac{ax+b}{x-2} \Rightarrow x = \frac{ay+b}{y-1} \quad f(y) = \frac{(a+2)y+b-2}{5y+2b-1} \quad \begin{cases} b-a=0 \\ \frac{a+2}{5}=1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow n=1 \text{ or } -1 \\ \Rightarrow \frac{4 \times 67}{n^2+3} \in \mathbb{Z} \text{ or } n=8 \text{ or } -8 \end{array} \quad 67/77$$

1, 8. 已知 $\frac{n^5+2n^2+1}{n^2+3}$ 為整數，則所有可能的整數 n 為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\boxed{8} \quad 2 + \frac{n^5-5}{n^2+3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (n^2+3) \mid (n^5+3n^3-(n^5-5)) \Rightarrow (n^2+3) \mid (3n^3+5) \Rightarrow \begin{cases} (n^2+3) \mid (9n^2-5) \times 5 \\ (n^2+3) \mid (9n^2-5) \times 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n^2+3) \mid (8/n^2-5) \\ (n^2+3) \mid (8/n^2+43) \end{cases}$$

9. 將 1、2、3、4、5、6、7 這七個數字作適當的排列，使得相鄰兩數之和為質數。求

54 共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種排列方式。 / $\frac{1}{4} \frac{3}{2} \frac{5}{6} \frac{7}{1}$ 先排奇數 $\rightarrow 4! = 24$

$$\boxed{9} \quad \begin{array}{c} \frac{1}{2} : 1, 3, 5, 7 \\ \frac{3, 6}{x} \frac{5, 4}{x} \frac{7, 2}{x} \end{array}$$

偶：2, 4, 6 $\quad \boxed{10} \quad S = 1 \cdot \frac{z}{2} + 2 \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \dots = \frac{z}{2} \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \right)$

-1/3 10. 無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cos \frac{n\pi}{3}$ 之值為 $\frac{1}{2} \cdot \frac{z}{2} = \frac{2z}{(1-\frac{z}{2})^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{z-2} = \frac{2}{3} e^{i(\frac{2\pi}{3})}$

$\left(\frac{1}{2}-2+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{6}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2}; \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{-1}{2} = \frac{-1}{3}$

二、計算題：共 3 題，每題 10 分。

54 1. 已知 $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ，考慮所有滿足 $C_2^n - C_2^m = 2025$ 的正整數 n, m ，求 $n-m$ 的最大

值。 $\frac{h(h-1)-m(m-1)}{2} = 2025 \Rightarrow (h-m)(h+m-1) = 2 \times 3^4 \times 5^2 \quad (2 \times 27) < (75)$

II

$$h-m < h+m-1 \quad \max = 54$$

2. 已知對任意的正實數 a_1, a_2, \dots, a_n ，滿足下列不等式恆成立： $\Rightarrow \sum_{k=1}^n (k-1) = 1+2+\dots+(n-1) < 2025$

$$64 \quad a_1 + 2a_2 + \dots + na_n < 2025 + (a_1 + a_2^2 + \dots + a_n^n)$$

$\boxed{2} \quad \text{令 } f(x) = kx - x^k, f'(x) = k(-x^{k-1}) = k(-x)(1+x+\dots+x^{k-2})$

$\frac{d}{dx} f(x) = k - kx^{k-1} = k(1-x^{k-1})$

$\frac{d}{dx} f'(x) = -k(k-1)x^{k-2}$

$\frac{d}{dx} f''(x) = -k(k-1)(k-2)x^{k-3}$

$\frac{d}{dx} f'''(x) = -k(k-1)(k-2)(k-3)x^{k-4}$

\vdots

$\frac{d}{dx} f^{(n)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+1)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n)x^{k-n-1}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+2)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-1)x^{k-n-2}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+3)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-2)x^{k-n-3}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+4)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-3)x^{k-n-4}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+5)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-4)x^{k-n-5}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+6)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-5)x^{k-n-6}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+7)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-6)x^{k-n-7}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+8)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-7)x^{k-n-8}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+9)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-8)x^{k-n-9}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+10)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-9)x^{k-n-10}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+11)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-10)x^{k-n-11}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+12)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-11)x^{k-n-12}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+13)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-12)x^{k-n-13}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+14)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-13)x^{k-n-14}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+15)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-14)x^{k-n-15}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+16)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-15)x^{k-n-16}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+17)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-16)x^{k-n-17}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+18)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-17)x^{k-n-18}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+19)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-18)x^{k-n-19}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+20)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-19)x^{k-n-20}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+21)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-20)x^{k-n-21}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+22)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-21)x^{k-n-22}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+23)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-22)x^{k-n-23}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+24)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-23)x^{k-n-24}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+25)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-24)x^{k-n-25}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+26)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-25)x^{k-n-26}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+27)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-26)x^{k-n-27}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+28)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-27)x^{k-n-28}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+29)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-28)x^{k-n-29}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+30)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-29)x^{k-n-30}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+31)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-30)x^{k-n-31}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+32)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-31)x^{k-n-32}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+33)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-32)x^{k-n-33}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+34)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-33)x^{k-n-34}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+35)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-34)x^{k-n-35}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+36)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-35)x^{k-n-36}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+37)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-36)x^{k-n-37}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+38)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-37)x^{k-n-38}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+39)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-38)x^{k-n-39}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+40)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-39)x^{k-n-40}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+41)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-40)x^{k-n-41}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+42)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-41)x^{k-n-42}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+43)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-42)x^{k-n-43}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+44)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-43)x^{k-n-44}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+45)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-44)x^{k-n-45}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+46)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-45)x^{k-n-46}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+47)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-46)x^{k-n-47}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+48)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-47)x^{k-n-48}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+49)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-48)x^{k-n-49}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+50)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-49)x^{k-n-50}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+51)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-50)x^{k-n-51}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+52)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-51)x^{k-n-52}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+53)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-52)x^{k-n-53}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+54)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-53)x^{k-n-54}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+55)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-54)x^{k-n-55}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+56)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-55)x^{k-n-56}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+57)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-56)x^{k-n-57}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+58)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-57)x^{k-n-58}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+59)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-58)x^{k-n-59}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+60)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-59)x^{k-n-60}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+61)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-60)x^{k-n-61}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+62)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-61)x^{k-n-62}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+63)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-62)x^{k-n-63}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+64)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-63)x^{k-n-64}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+65)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-64)x^{k-n-65}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+66)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-65)x^{k-n-66}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+67)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-66)x^{k-n-67}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+68)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-67)x^{k-n-68}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+69)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-68)x^{k-n-69}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+70)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-69)x^{k-n-70}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+71)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-70)x^{k-n-71}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+72)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-71)x^{k-n-72}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+73)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-72)x^{k-n-73}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+74)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-73)x^{k-n-74}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+75)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-74)x^{k-n-75}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+76)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-75)x^{k-n-76}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+77)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-76)x^{k-n-77}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+78)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-77)x^{k-n-78}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+79)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-78)x^{k-n-79}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+80)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-79)x^{k-n-80}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+81)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-80)x^{k-n-81}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+82)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-81)x^{k-n-82}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+83)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-82)x^{k-n-83}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+84)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-83)x^{k-n-84}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+85)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-84)x^{k-n-85}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+86)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-85)x^{k-n-86}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+87)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-86)x^{k-n-87}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+88)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-87)x^{k-n-88}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+89)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-88)x^{k-n-89}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+90)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-89)x^{k-n-90}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+91)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-90)x^{k-n-91}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+92)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-91)x^{k-n-92}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+93)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-92)x^{k-n-93}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+94)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-93)x^{k-n-94}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+95)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-94)x^{k-n-95}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+96)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-95)x^{k-n-96}$

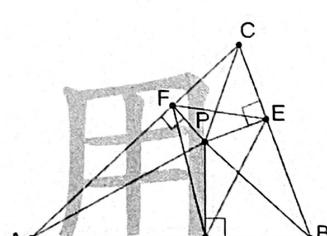
$\frac{d}{dx} f^{(n+97)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-96)x^{k-n-97}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+98)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-97)x^{k-n-98}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+99)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-98)x^{k-n-99}$

$\frac{d}{dx} f^{(n+100)}(x) = -k(k-1)\dots(k-n-99)x^{k-n-100}$

3. 設 P 是三角形 ABC 內一點，滿足 $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ 。設 D, E, F 分別是 P 到 AB, BC, CA 三邊的垂足。試證：三角形 DEF 與三角形 ABC 相似。



$$\text{BDPE 共圓} \Rightarrow \angle PDE = \angle PBC = \angle PAB$$

$$\text{ADPF 共圓} \Rightarrow \angle PDF = \angle PAC$$

$$\Rightarrow \angle FDE = \angle PDE + \angle PDF$$

$$= \angle PAB + \angle PAC = \angle A$$

同理 $\angle DEF = \angle ABC$

(AA相似)