甲 乙

S_1: 1W 1B ; 3W 3B

S_2: 2W ; 2W 4B

S_3: 2B ; 4W 2B

$$\begin{array}{c|ccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ \hline S_1 & & & \\ S_2 & & & \\ S_3 & & & \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{4} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}$$

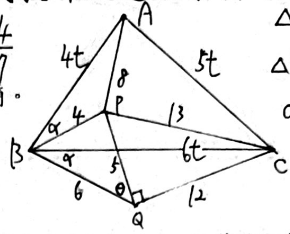
2025.4.28(一)～4.30(三) Ru

114 學年度臺北市立永春高中第 1 次正式教師甄選數學科試題卷

$\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{3}\beta=\beta$, $\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{3}\gamma=\gamma$ $\Rightarrow$ $3\alpha=8\beta$, $3\alpha=8\gamma$; $\alpha:\beta:\gamma=8:3:3$ $\Rightarrow \alpha=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$

$\boxed{1}$

※請用藍、黑原子筆於答案卷中作答，答案若為分數或根式請化至最簡。



$\boxed{7}$

$\triangle ABC\sim\triangle PBQ \Rightarrow \overline{PQ}=5$

$\triangle BQC\sim\triangle BPA \Rightarrow \overline{QC}=12$

$\cos\theta=\frac{45}{2\cdot5\cdot6}=\frac{3}{4}$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \cos(90^\circ+\theta)=-\frac{\sqrt{7}}{4}$

一、填充題：每題 7 分，共 70 分

$\frac{4}{7}$ 1. 對於甲、乙兩袋球，下面的動作稱之為「交換」：分別自甲、乙兩袋中同時取出一球，接著將取自甲袋的球放入乙袋、取自乙袋的球放入甲袋。若甲袋中原有1白球與1黑球，乙袋中原有3白球與3黑球，經過無限多次「交換」後，甲袋中仍有1白球與1黑球的機率會趨近一個定值，求此定值。

IIII, TTT, NN) 3种

$\boxed{2}$ SUOALZED → 8种

4同 1

3同1異 $C^2_1C^{10}_1\cdot4=80$

2同2同 $C^3_2\cdot6=18$

2同2異 $C^3_1C^{10}_2\cdot\frac{4!}{2!}=1620$

4異 $C^{11}_4\cdot4!=7920$

9540

9639 2. 從 INSTITUTIONALIZED 這個單字中，任選4個字母排成一列，求所有的排法數。

$x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$ 3. 解方程式$\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2x^2+x+5}=\sqrt{x^2-3x+13}$。

$\boxed{3}$ 令原式 $a+b=c$，$\square(x^2+x+1)+\triangle(2x^2+x+5)=x^2-3x+13$

$\begin{cases}\square+\triangle=-3\\ \square+2\triangle=1\end{cases} \Rightarrow \triangle=4,\ \square=-7$

$-7a^2+4b^2=c^2=a^2+2ab+b^2 \Rightarrow 8a^2+2ab-3b^2=0$

$\begin{matrix}4 & +3\\ 2 & -1\end{matrix}$ $4a+3b>0,\ 2a=b$

$4(x^2+x+1)=2x^2+x+5 \Rightarrow 2x^2+3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$

$\frac{-1}{4}$ 4. 曲線Γ的極坐標方程式為$r=1+\cos\theta$，其中$0\le\theta\le\pi$，試求Γ上的點之x坐標最小值。

$\boxed{4}$ $x=r\cos\theta=c^2+c$ (令 $\cos\theta=c$)　$\cos\theta\in[-1,1]$　當 $c=\frac{-1}{2}$，$\min=\frac{-D}{4}=\frac{-1}{4}$

$\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$ 5. 已知隨機變數X的機率質量函數$P(X=n)=\frac{a}{2^n}+\frac{b}{3^n}$，其中$n=1,2,3,\cdots$，且$X$的期望值為$\frac{15}{8}$，試求數對$(a,b)$。

$\boxed{5}$ $f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k \Rightarrow f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$

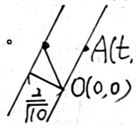
$\frac{15}{8}=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}+\frac{b}{3}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2}=2a+\frac{3}{4}b$，$1=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{b}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=a+\frac{b}{2}$

6. 坐標平面上，正六邊形$OABCDE$之頂點依逆時針排列為O（原點）、A、B、C、D、E，其中直線OA之方程式為$y=3x$，

$\left(\frac{\sqrt{3}-9}{15},\frac{\sqrt{3}+1}{5}\right)$ 直線BE之方程式為$y=3x+2$，試求此正六邊形的外接圓之圓心坐標。

$\left(\frac{2}{15}\sqrt{3}+\frac{2}{5}\sqrt{3}i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$\boxed{6}$ $(\text{邊長})^2=\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4\cdot4}{10\cdot3}=10t^2$



$\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{3}-9}{15},\frac{\sqrt{3}+1}{5}\right)$ #

$\frac{-\sqrt{7}}{4}$ 7. 已知在$\triangle ABC$中，三邊$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$長度的比例為4:6:5，其內部一點P滿足$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$的長度分別是8、4、13，試求$\cos(\angle APB)$之值。

取 $\overline{BQ}=6$ 且

$\boxed{7}$ the piano 在 $\overline{BC}$ 異於 A 的一側，$\angle PBQ=\angle ABC$

8. 設矩陣$A=\begin{bmatrix}7 & -8\\ -7 & 8\end{bmatrix}$滿足$(I+A)^n=I+a_nA$，其中$n$為自然數，$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，且$\{a_n\}$為一個數列，請寫出$a_n$的一般

$\frac{16^n-1}{15}$ 式（請用n的代數式表示）。

$a_n=C^n_1+C^n_2\cdot15^1+C^n_3\cdot15^2+\cdots+C^n_n15^{n-1}=\frac{16^n-1}{15}$

$\boxed{8}$ $A^2=\begin{bmatrix}7 & -8\\ -7 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -8\\ -7 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}105 & -120\\ -105 & 120\end{bmatrix}=15A$，$(1+x)^n=1+C^n_1x+C^n_2x^2+\cdots+C^n_nx^n$

$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 9. 設數列$\{a_n\}$的一般式為$a_n=\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})}$，試求$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$之值。

$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\right)$

$\boxed{9}$ $a_n=\left(\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})}-\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})}\right)\times\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$

分子 $\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})$

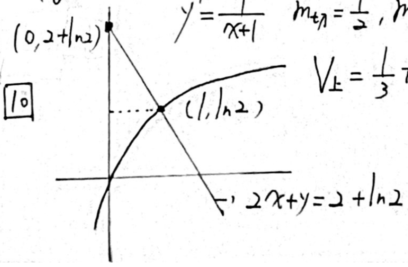
$\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

$\pi\left(\frac{1}{6}+\ln2\right)$ 10. 函數$f(x)=\ln(x+1)$上有一點$A(1,\ln2)$，區域R代表由過A的法線、函數$y=f(x)$的圖形與y軸所圍成的封閉區域，將R繞y軸旋轉可得立體S，求S的體積。

$y=\ln(x+1)\Rightarrow x=e^y-1$　$\int_0^{\ln2}\pi x^2\,dy$　$V_上+V_下=\pi\left(\frac{1}{6}+\ln2\right)$ #

$y'=\frac{1}{x+1}$　$m_切=\frac{1}{2}$，$m_法=-2$

$\boxed{10}$



$V_上=\frac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot2=\frac{2}{3}\pi$

$V_下=\pi\int_0^{\ln2}(e^{2y}-2e^y+1)\,dy$

$=\pi\left(\frac{1}{2}e^{2y}-2e^y+y\right)\Big|_0^{\ln2}=\pi\left(2-4+\ln2-\left(\frac{1}{2}-2\right)\right)$

$=\pi\left(\ln2-\frac{1}{2}\right)$

二、計算證明題：每題 10 分，共 30 分

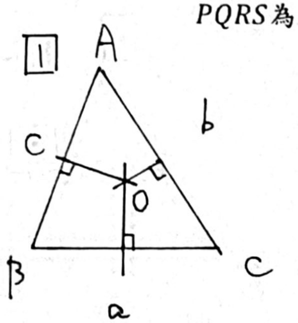
$\frac{\sqrt{2}}{3}$

1. 已知O為ΔABC的外心，且滿足$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{BA}$，試求$\cos B$的最小值。

2. 有一筆資料包含n個數$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$，其平均數為$\overline{X}$，試證$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{X}^2}\ge\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\overline{X}|$。

3. 空間中$A-BCD$為一正四面體，P、Q、R依序為$\overline{AC}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$三邊的中點，若ΔPQR所決定的平面E交$\overline{AD}$於S，試證$PQRS$為一正方形。

$\boxed{1}$

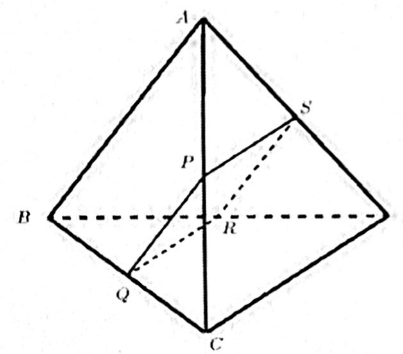


$$\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=3\overrightarrow{BO}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+4\overrightarrow{CO}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})$$

$$\Rightarrow\quad -c^2+b^2=3(-c^2+a^2)+4(-a^2+b^2)$$

$$\Rightarrow\quad a^2+2c^2=3b^2$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-\frac{1}{3}(a^2+2c^2)}{2ac}=\frac{\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{3}c^2}{2ac}\ge\frac{\sqrt{2}}{3}$$



$\boxed{2}$

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}\ge\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i-\overline{X}|$$

令 $a_i=|x_i-\overline{X}|$

$$\Leftarrow\quad \frac{1}{n}(a_1^2+\cdots+a_n^2)\ge\frac{1}{n^2}(a_1+\cdots+a_n)^2$$

$$\Leftarrow\quad (a_1^2+\cdots+a_n^2)(1^2+\cdots+1^2)\ge(a_1+\cdots+a_n)^2$$

$\boxed{3}$

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})=0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{PS}$, 同理 $\angle Q=\angle R=\angle S=90^\circ$

$$\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\overline{PS}$$