2024.4.23(三) ~ 4/27(日)

臺北市立松山高級中學 114 學年度第 1 次正式教師甄選數學科初試試題

請使用黑色或藍色原子筆書寫，滿分 100 分。

一、填充題（答案請寫在答案欄，每題 4 分，共 20 分）

1. 試求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{1+4^{2^n}}=$________。

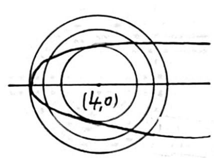
thepiano

$n=1$ $n=2$ $n=3$

$\frac{1}{15}+\frac{1}{1-4^2}+\frac{1}{1+4^2}+\frac{2}{1+4^4}+\frac{4}{1+4^8}+\cdots$

$=\frac{1}{15}+\frac{2}{1-4^4}+\frac{2}{1+4^4}+\frac{4}{1+4^8}+\cdots=\frac{1}{15}+\frac{4}{1-4^8}+\frac{4}{1+4^8}=\cdots=\frac{1}{15}+\frac{2^n}{1-4^{2(n+1)}}$

2. 已知拋物線 $y^2=x$ 與圓 $(x-4)^2+y^2=r^2$（$r>0$）交於相異四點，試求 r 的取值範圍為________。



$(x-4)^2+x=r^2$

$\Rightarrow x^2-7x+16-r^2=0$

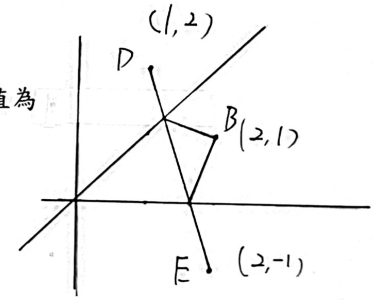
$D>0 \Rightarrow 49-64+4r^2>0$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{15}}{2}<r<4$

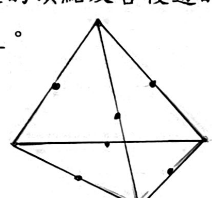
3. 設 a,b 為實數，試求 $\sqrt{2a^2-6a+5}+\sqrt{b^2-4b+5}+\sqrt{2a^2-2ab+b^2}$ 的最小值為

$\sqrt{(a-2)^2+(a-1)^2}+\sqrt{(b-2)^2+(0-1)^2}+\sqrt{(a-b)^2+(a-0)^2}$

令 $A(a,a)$, $B(2,1)$, $C(b,0)$　　$min=\overline{DE}=\sqrt{10}$



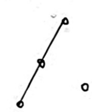
4. 從正四面體的頂點及各稜邊的中點共 10 個點中，隨機選取四個相異點，則四點不共平面的機率為________。



$C^6_4\times4=60$

中間

3組

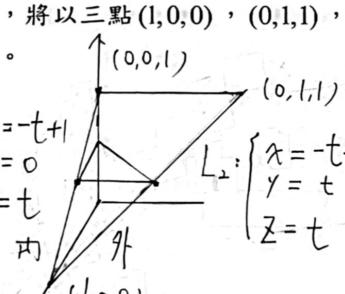


6組

$1-P(\text{共面})$

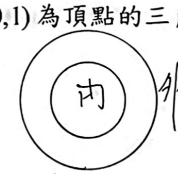
$=1-\frac{69}{C^{10}_4}=1-\frac{69}{7\cdot10\cdot3}=\frac{47}{70}$

5. 在空間坐標中，將以三點 $(1,0,0)$，$(0,1,1)$，$(0,0,1)$ 為頂點的三角形繞 z 軸旋轉，則所得旋轉體體積為________。



$L_1:\begin{cases}x=-t+1\\y=0\\z=t\end{cases}$

$L_2:\begin{cases}x=-t+1\\y=t\\z=t\end{cases}$

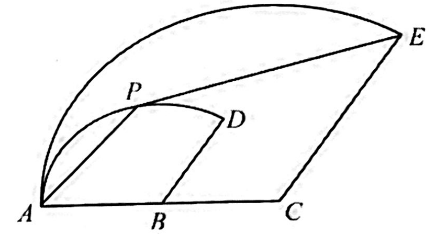


$\pi\int_0^1[(-t+1)^2+t^2-(-t+1)^2]dt=\frac{\pi}{3}$

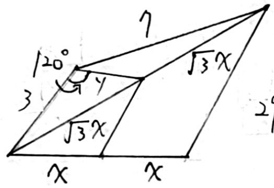
答案欄

二、計算題（需詳列計算過程，每題 8 分，共 80 分）

1. 如圖，兩扇形 ABD 與扇形 ACE，其中 B 為 $\overline{AC}$ 的中點，$\angle ABD=\angle ACE=\frac{2\pi}{3}$。若點 P 為 AD 上一點且滿足 $\overline{PA}=3$，$\overline{PE}=7$，試求扇形 ABD 的面積為__________。



答案：$\frac{91}{36}\pi$



$\begin{cases} 49+9=2(3x^2+y^2)=2\cdot 29 \\ 3x^2=y^2+9+3y \end{cases}$

$29-y^2 \Rightarrow 2y^2+3y-20=0$

$\begin{matrix} 2 & -5 \\ 1 & +4 \end{matrix} \Rightarrow y=\frac{5}{2}$

$\pi x^2\cdot\frac{1}{3}=\left(29-\frac{25}{4}\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\pi=\frac{91}{36}\pi$

2. 試求滿足方程組 $\begin{cases} xy=z-x-y \\ xz=y-x-z \\ yz=x-y-z \end{cases}$ 的有序實數組 (x,y,z)。

$\begin{matrix} (x+1)(y+1)=z+1 \\ (x+1)(z+1)=y+1 \\ (y+1)(z+1)=x+1 \end{matrix} \Rightarrow (x+1)(y+1)(z+1)\left((x+1)(y+1)(z+1)-1\right)=0$

↳ $(-1,-1,-1)$

$1=(x+1)(y+1)(z+1)$

$\begin{matrix} & & & x & y & z \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ & & & & \vdots & \end{matrix}$

答案：$(-1,-1,-1)$，$(0,0,0)$，$(0,-2,-2)$，$(-2,0,-2)$，$(-2,-2,0)$

3. 若函數 $f:R\to R$ 滿足「對任意實數 x,y 均有 $f(x)f(y)=f(x+y)+xy$」，回答下列問題

(1) 試求 $f(0)$ 的值。 (1) $y=0$: $f(x)(f(0)-1)=0 \Rightarrow f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ or $f(0)=1$.

$\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix} \Rightarrow (f(1))^2=f(2)+1$

$0=0+1$ 不合

$\Rightarrow f(0)=1$

(2) 試求滿足題意條件的所有函數 $f(x)$。

答案：(1) 1 (2) $f(x)=1+x$ 或 $1-x$

(2) $f(x)f(-x)=1-x^2 \Rightarrow f(1)f(-1)=0 \Rightarrow f(1)=0$ or $f(-1)=0$

$\Rightarrow f(x)f(1)=f(x+1)+x=0$ or $f(x)f(-1)=f(x-1)-x=0$

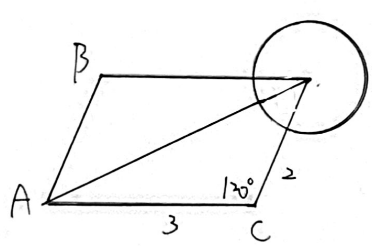
$f(x+1)=-x$ or $f(x-1)=x \Rightarrow f(x)=1-x$ or $f(x)=1+x$

4. 假設兩數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$，對所有正整數 n 都滿足 $2b_n+\frac{6n-30}{n}<a_n<4b_n$。已知 $\lim_{n\to\infty}a_n=12$，試說明數列 $\langle b_n\rangle$ 發散或收斂？若收斂，求其極限值。

答案：由夾擠定理得數列 $\langle b_n\rangle$ 收斂，其極限值為 3

5. 在坐標平面上有一個三角形 ABC，已知 $\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=3$，$\angle BAC=60^\circ$，若平面上有一動點 D 滿足 $\left|\overrightarrow{CD}\right|=1$，試求 $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right|$ 的最小值。

答案：$\sqrt{19}-1$



$\sqrt{4+9-2\cdot3\cdot2\left(-\frac{1}{2}\right)}-1=\sqrt{19}-1$