國立新竹科學園區實驗高級中等學校（高中及國中部）
114 學年度第 1 次教師甄選試題卷

考試科目：　高中數學科　專業知識與教材教法　　　甄選科別：　高中數學領域−數學科

第一大題：填充題，10 題，每題 6 分，共 60 分。

說明：(1)作答時請將答案依照順序寫在答案卷上。
(2)答案須化到最簡，否則不予計分。

1. 設雙曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的右焦點為 F，過 F 作與 x 軸垂直的直線 L，L 與兩條漸近線分別交於 A、B 兩點，P 是 L 與雙曲線的一個交點，設 O 為原點，若有實數 m、n，使得向量 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，且 $mn=\dfrac{2}{9}$，則：$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=$_____。

2. 在一排有 20 張椅子的座位區中，要安排甲、乙、丙、丁、戊 5 人入坐，一人坐一張椅子，要求第 1 張與最後一張椅子不能安排人入坐，且每相鄰的 5 張椅子至少要有一人入坐，任兩人不能坐在相鄰的椅子上。試問：5 人入坐的方法有______種可能。

3. 等差數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 n 項和為 S_n。已知 $a_1=10$，a_2 為整數，且對所有的正整數 n，$S_n\le S_4$ 恆成立。若 $b_n=\dfrac{1}{a_n a_{n+1}}$，則：$b_1+b_2+b_3+...+b_{10}=$______。

4. 若實數 x,y 滿足：$4x^2-4xy+2y^2=1$，則：$3x^2+xy+y^2$ 的最大值與最小值的和為______。

5. 設 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$，且滿足：$\sin\alpha\cdot\cos\beta+|\cos\alpha\cdot\sin\beta|=\sin\alpha\cdot|\cos\alpha|+|\sin\beta|\cdot\cos\beta$，則：$(\tan\gamma-\sin\alpha)^2+(\cot\gamma-\cos\beta)^2$ 的最小值為______。

6. m,n 為正整數，則滿足：$\sqrt{m+\sqrt{m^2-n}}+\sqrt{m-\sqrt{m^2-n}}=6$ 的所有 n 的總和為______。

7. 已知 $x,y\in\mathbb{R}^+$，則 $\left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2x}\right)^2$ 的最小值為______。

8. 已知一圓內接 15 邊形，且圓心在此 15 邊形內部。從此 15 邊形中任取 3 個頂點可構成一個三角形，則所構成的三角形中最多有______個鈍角三角形。

9. 將 $(x-\sqrt{3})^{50}+(x+1)^{50}$ 展開後可得多項式 $a_{50}x^{50}+a_{49}x^{49}+a_{48}x^{48}+\cdots+a_1x+a_0$，設 $a_0-a_2+a_4-a_6+\cdots+a_{48}-a_{50}$ 之值為 k，試求：$\log_4|k|=$______。

10. 設複數 z_1,z_2 滿足：$|z_1|=|z_1+z_2|=3$，$|z_1-z_2|=3\sqrt{3}$，則：$(z_1\cdot\overline{z_2})^{2025}+(\overline{z_1}\cdot z_2)^{2025}=$______。

國立新竹科學園區實驗高級中等學校（高中及國中部）
114 學年度第 1 次教師甄選試題卷

考試科目： 高中數學科 專業知識與教材教法　　　　甄選科別： 高中數學領域–數學科

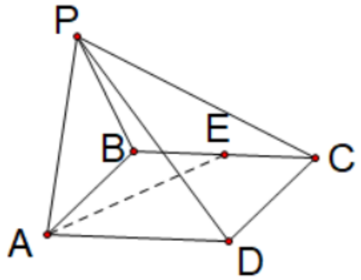
第二大題：計算與證明題，4 題，每題 10 分，共 40 分。

說明：(1)作答時請將答案依照題號順序寫在答案卷上。
(2)需詳列計算過程，只寫出答案無過程者不予計分。

1. 如下圖，底面為正方形的四角錐 $P\text{-}ABCD$，其中 ΔPAB 垂直底面正方形 $ABCD$ 且 $\overline{PB}=\overline{AB}$。若 E 為 $\overline{BC}$ 中點，則：

   (1) 當 $\angle PBA=60^\circ$ 時，試證明: $\overline{AE}\perp\overline{PD}$

   (2) 若直線 $\overleftrightarrow{AE}$ 與 ΔPAD 夾角為 θ，則 $\cos\theta$ 的取值範圍為何？



2. 已知各項皆為正整數的數列 $<a_n>$ 的前 n 項和為 S_n 且對任意正整數 n，

   $\sqrt{S_n}=\lambda\left(a_n-1\right)+1$，$\lambda$ 為正實數。若 $2a_2=a_1+a_3$，試求：數列 $<a_n>$ 的一般項。

3. 已知函數 $f(x)=\sin^{12}x+\cos^{12}x$。若 $f(x)$ 的最小值為 m、最大值為 M，試求：m 及 M 各為何？

4. 設 ΔABC 的三邊 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 的長度分別為 a,b,c，在邊 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 上分別取點

   L,M,N，且 $\overline{BL}:\overline{LC}=c:b$，$\overline{CM}:\overline{MA}=a:c$，$\overline{AN}:\overline{NB}=b:a$。

   若 $b\overrightarrow{BM}+c\overrightarrow{CN}+a\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{0}$，試問：$\Delta ABC$ 是什麼樣的三角形?