國立蘭陽女子高級中學 114 學年度第一次正式教師甄選數學科試題

一、 多選題(請在答案卷第一頁作答，並依序標明題號，每一題 8 分，只錯一個選項者得 5 分，只錯二個選項者得 2 分，錯三個以上選項者得 0 分，共 16 分)

1. 設 $f(x)$ 為五次多項式，若 $f(x)$ 除以 $(x-1)^3$ 的餘式為 -1， $f(x)$ 除以 $(x+1)^3$ 的餘式為 1，試問下列哪些選項的敘述是正確的?

(1) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+1)$ 的餘式為 $-x$

(2) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+1)^2$ 的餘式為 $\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$

(3) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+1)^3$ 的餘式為 $\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

(4) $f(x)=-\frac{3}{8}(x-1)^5+\frac{15}{8}(x-1)^4-\frac{5}{2}(x-1)^3-1$

(5) $f(-3)=63$

2. 已知拋物線 $\Gamma: y=3x-x^2$ 與直線 $L_1: x=a$ 及 $L_2: y=mx$ ($m>0$), 試問下列選項哪些是正確的?

(1) Γ 與 x 軸的交點為(0 , 0)與(3 , 0)

(2) Γ 與 x 軸所圍成的區域面積為 $\frac{9}{2}$

(3)若直線 L_1 將拋物線 Γ 與 x 軸所圍成的區域面積平分, 則 $a=\frac{3}{2}$

(4) Γ 與 L_2 的交點為(0 , 0)與($3-m$, $3m-m^2$)

(5)若直線 L_2 將拋物線 Γ 與 x 軸所圍成的區域面積平分, 則 $m=3-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$

二、 填充題(請在答案卷第二頁作答，並依序標明題號，不須計算過程，僅須寫出最後的答案，每一題 5 分，共 65 分)

1. 已知雙曲線 Γ 之兩焦點為 $F_1(0,0),F_2(2,2)$，點 $P(2+\frac{1}{\sqrt{2}},2-\frac{1}{\sqrt{2}})$ 為雙曲線 Γ 上一點，求雙曲線 Γ 的方程式。

2. 設 a,b,c 為正整數且滿足等式 $c=(a+bi)^3-47i$ ，則 $c=$__________。

3. $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=4,\overline{CA}=5,\overline{AB}=6$ ，H 為垂心，D 為 H 在 $\overline{BC}$ 上的投影點，若 $\overline{AD}=x\overline{AB}+y\overline{AC}$ ，求數對 (x,y) 。

4. 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\frac{n}{(n+4)^2}+\frac{n}{(n+6)^2}+\cdots+\frac{n}{(3n-2)^2}\right)$ 的值為 ____________ 。

國立蘭陽女子高級中學 114 學年度第一次正式教師甄選數學科試題

5. 設一橢圓方程式為$\Gamma: x^2+2y^2=2$及一直線$L: y=x+m$。若橢圓上存在不同的兩點P、Q對稱於直線L，求m之範圍。

6. 空間中三點 $A(1,1,1), B(2,4,0), C(3,2,1)$，在平面 $E: x+y+z=6$ 上找一點 P 使得 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 有最小值，求 P 點坐標。

7. 計算 $sin^2 37°+sin^2 8°+\sqrt{2}sin37°sin8°$ 之值。

8. 設$\beta\in[\frac{3\pi}{4},\pi]$且滿足$\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{3}$，則$\beta$之值為____________。

9. 設α、β、γ、δ為實係數方程式$4x^4+bx^3+cx^2+dx+5=0$的四個正根且$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{4}+\frac{\gamma}{5}+\frac{\delta}{8}=1$，試求$b$的值為 ____________ 。

10. 設x, y, z均為正實數且$\begin{cases}\log(2000xy)=4+\log x\cdot\log y\cdots(1)\\ \log(2yz)=1+\log y\cdot\log z \quad\cdots(2)\\ \log zx=\log z\cdot\log x \quad\cdots(3)\end{cases}$，則$x+y+z$的值為 ____________ 。

11. 由 1、2、3、4 可重複組成一五位數，且規定 4 不能排在 1 的右側(可能不相鄰)，例如 44121、12133 符合規定，12241 不符合規定，求此五位數有幾種。

12. 已知有寫著 1,2,3,4,5 的球各 2 顆，將其中 5 顆球隨機放入 A 箱，其餘 5 顆放入 B 箱。箱子內所有球的數字乘積的個位數稱為箱子點數，求：已知 A 箱點數為 0 ，則兩個箱子點數皆為 0 的條件機率。

13. 設有一分子和分母皆為二位數的真分數A，且分子的個位數和分母的十位數相同。現在將此分子之個位數以及分母的十位數擦掉，得一分數B，例如當$A=\frac{15}{56}$時，$B=\frac{1}{6}$。若$A=B$，則A之值為_______________。(請寫出約分前的分數)

國立蘭陽女子高級中學 114 學年度第一次正式教師甄選數學科試題

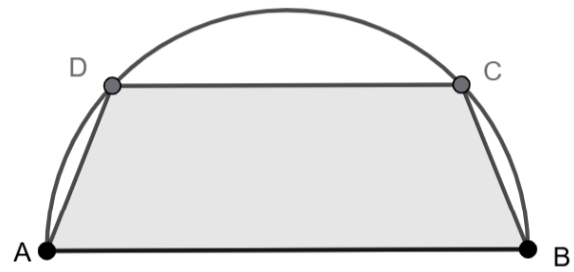
三、 計算證明題(請從答案卷第三頁開始作答，依序標明題號，並詳細寫出計算或證明過程，每一題 10 分，共 30 分)

1. 證明 $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ 為無理數。

2. 如圖，將一塊半徑為 R 的半圓形鋼板截成等腰梯型 ABCD 的形狀，它的下底 $\overline{AB}$ 為半圓直徑，上底 $\overline{CD}$ 的端點在圓周上，求：

   (1) 此梯形周長之最大值。(以 R 表示) (5 分)

   (2) 此梯形面積之最小值。(以 R 表示) (5 分)



3. 設隨機變數 X 服從母數為 p 的幾何分布，即 $X \sim G(p)$，證明：

   (1) $E(x)=\dfrac{1}{p}$ (5 分)

   (2) $Var(x)=\dfrac{1-p}{p^2}$ (5 分)