國立嘉科實驗高級中學

114學年度高中部教師甄選

數學科　試題

作答注意事項

1. 本試題共一部分：非選擇題，共計 100 分。
2. 選擇題請用 2B 軟心鉛筆在答案卡劃記，非選擇題限用藍色、黑色原子筆或鋼筆在答案本上作答，但繪圖時得使用黑色鉛筆。
3. 本科不可以使用電子計算器。

一、填充題（每題 7 分，共 56 分）

1. 若$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}=\frac{1}{7}$，$a$、$b$、$c$ 為質數，則$a^2+b^2+c^2=$______。

參考答案：83

2. 設拋物線Γ：$y=x^2-kx+k$ 與 x 軸交於$(a,0)$與$(b,0)$兩點，其中 $0<a<b$。Γ在第一象限與 x 軸、y 軸所圍區域的面積為R_1，Γ在第四象限與 x 軸所圍區域的面積為R_2。若$R_1=R_2$，且 k, a, b 為實數，求（k, a, b）= ______。

參考答案：$(\frac{16}{3},\frac{4}{3},4)$

3. 已知$\begin{cases}\tan\alpha+\log_3(3\tan\alpha+6)=2\\ \tan\beta+3^{\tan\beta-1}=4\end{cases}$，求$\tan\alpha+\tan\beta=$______。

參考答案：**2**

4. 有一質點在實數線上跑來跑去，它由 O(0)跑至$A_1(1)$，稱為第一次，再由$A_1(1)$回頭跑至$A_2\left(\frac{1}{3}\right)$，稱為第二次，再由$A_2\left(\frac{1}{3}\right)$回頭跑至$A_3\left(\frac{7}{9}\right)$，稱為第三次，再由$A_3\left(\frac{7}{9}\right)$回頭跑至$A_4\left(\frac{13}{27}\right)$，稱為第四次，…，依此類推持續跑來跑去，若第 101 次後，它會停在距原點$\frac{[q^r+(q-1)^r]}{p\times q^{r-1}}$處，其中 p、q、r 為相異正整數，則有序數對(p,q,r)=______。

參考答案：(5,3,101)

5. 若複數 z 滿足 $\left|\frac{z^2+1}{z+i}\right|+\left|\frac{z^2+4i-3}{z-i+2}\right|=4$，則 $|z-1|$ 的最小值為______。

參考答案：$\sqrt{2}$

6. 可星和予熹兩人進行某項比賽，約定每局必分出勝負，勝者得 1 分，負者得 0 分，比賽進行到有一人比對方多 2 分或打滿 8 局時停止。設可星在每局中獲勝的機率為 $\frac{3}{4}$，且各局勝負為獨立事件，求比賽停止時，比賽局數的期望值為______。

參考答案：$\frac{803}{256}$

7. 平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 滿足 $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$ 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$，若 $\vec{a}-\vec{c}$ 與 $\vec{c}-\vec{b}$ 的夾角為 $\frac{\pi}{3}$，求 $\left|\vec{c}\right|$ 的最大值與最小值的總和為______。

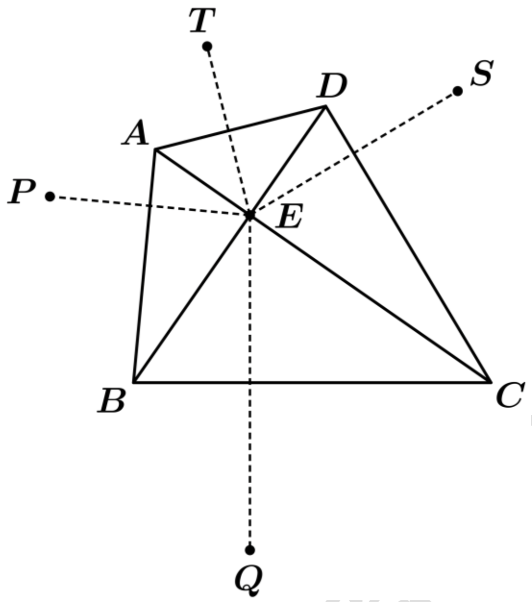
參考答案：$\sqrt{3}$

8. 已知集合 $S=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{1}{9},\frac{1}{13},\frac{1}{17},\frac{1}{25}\right\}$ 共有 127 個非空子集合，設這些子集合內的元素乘積分別為 $p_1,p_2,p_3,\cdots,p_{127}$，求 $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{127}=$______。

參考答案：$\frac{171}{85}$

二、計算證明題（每題 10 分，共 20 分）

1. 如圖所示，$ABCD$ 是一個凸四邊形，若兩對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 彼此垂直且交於 E 點，設 P,Q,S,T 分別為點 E 對於 $ABCD$ 四個邊的對稱點。證明：P,Q,S,T 四點共圓。**(10 分)**



2. x、y 為實數，且 $x^2+xy+y^2=6$，試求 $x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$ 的最大值及最小值為分別為多少？（**10 分**）

參考答案：最大值：3、最小值：$-8-6\sqrt{2}$

三、申論題（共 24 分）

1.在第四冊數 A 的教學中有一道問題：

空間中有二直線$L_1:\frac{x+5}{3}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-2}{-1}$、$L_2:\frac{x-1}{-2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-2}{2}$，試求出$L_1$與$L_2$的距離為何？

(1) 請以講述這道問題前的知識概念教學脈絡、教學流程，以及學生可能會犯錯的迷思概念等，設計一份教案。(**8 分**)

(2) 試用 3 種以上不同的方法求出L_1與L_2的距離。(**每種方法 2 分，上限為 6 分**)

2. 目前高一數列級數課程中，經常會介紹到三個常用級數和公式：

若n為正整數，$\begin{cases} 1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1) \\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2 \end{cases}$。

大部分參考書皆是直接提出結論，可能將這些級數和公式作為數學歸納法證明的練習，但未告知其由來。因此若教完這個單元後，學生過來詢問級數$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$的公式為何時，你會如何跟學生介紹呢？(**10 分**)