2025.4.16(三)～4.23(三)

臺北市立第一女子高級中學114學年度第一次正式教師甄選數學科筆試試題卷

$\boxed{1}$ $\log_{45}45, \ldots \log_{45}(45^2-1)$

$45^2-45 \to 1980+2\times\underline{10}=2000$

$\Rightarrow 45^2-1+10=2034$

$\boxed{2}$ $(0,0),\ (\square,4),\ (\triangle,5)$

$\triangle+5i=(\square+4i)(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt3}{2}i)$

$=(\frac{\square}{2}-2\sqrt3)+i(2+\frac{\sqrt3}{2}\square)$

$\Rightarrow \square=2\sqrt3,\ \triangle=-\sqrt3 \Rightarrow \square\triangle\cdot25=-150$

$\boxed{3}$

a	2	3	4	5	6	7
b	2,4,8	3,9	4	5	6	7

$P=\frac{9}{6\times8}=\frac{3}{16}$

$X\sim Geo(p=\frac{3}{16})\Rightarrow E(X)=\frac{1}{p}=\frac{16}{3}$

一、填充題(每格7分，共56分)

2034 1. 已知$[x]$為不大於x之最大整數，若$\sum_{k=1}^{n}[\log_{45}k]=2000$，則$n=$______。

-150 2. 坐標平面上$O(0,0)$、$A(a,20)$、$B(b,25)$為一個正三角形的三個頂點，則$ab=$______。

$\frac{16}{3}$ 3. 小綠投擲兩個公正的骰子，其中一個骰子A是正六面體，點數分別為2,3,4,5,6,7；另外一個骰子B是正八面體，點數分別為2,3,4,5,6,7,8,9。記錄骰子A的點數為a，骰子B的點數為b，若第X次投擲時，首次滿足$\log_a b$為正整數，則X的期望值為______。

$\frac{3\sqrt2}{4}$ 4. 正四面體$ABCD$的稜長為5，現分別在$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$上各取一點P、Q、R。若$\overline{AR}=2$，且$\overline{AD}$與平面PQR垂直，則五面體$PQR\text{-}BCD$的體積為

$\boxed{4}$ $A(0,0,0)$ $R(2,2,0)$ $P(0,s,s)$ $Q(t,0,t)$ $D(5,5,0)$ $B(0,5,5)$ $C(5,0,5)$

$(t-2,-2,t)\cdot(1,1,0)=0$

$(-2,s-2,s)\cdot(1,1,0)=0$

$\Rightarrow t=s=4 \Rightarrow V=(1-\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5})\cdot\frac{\sqrt2}{12}\cdot5\cdot5\cdot5=\frac{31}{4}\sqrt2$

$2\ln2-\ln3$ 5. 設$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{2n^2+3kn+k^2}$，則$\lim_{n\to\infty}a_n=$

$\boxed{5}$ $\frac{1}{n}\sum\frac{1}{2+3(\frac{k}{n})+(\frac{k}{n})^2}\to\int_0^1\frac{1}{x^2+3x+2}dx=\int_0^1(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2})dx=\ln2-\ln3+\ln2=2\ln2-\ln3$

$\frac{21}{5}$ 6. 阿綠冒險時得到兩個尚未開啟的神奇寶箱，這些寶箱機緣到了，就會自動開啟，否則就會維持關閉狀態；而寶箱一旦開啟，就會一直維持開啟狀態。已知對每一個寶箱而言，如果今天沒有開啟，則隔天會開啟的機率為$\frac{1}{3}$。若在阿綠得到寶箱的X天之後，首次出現兩個寶箱都是開啟狀態，則X的期望值為

（註：阿綠得到寶箱的那一天，寶箱不會開啟。）

$\boxed{6}$ S_0：0個 S_1：1個 open S_2：2個

E_0：$S_0\to S_2$的期望值

E_1：$S_1\to S_2$ ～

$S_0\begin{cases}4/9 \to S_0\\4/9\to S_1\\1/9\to S_2\end{cases}$ $S_1\begin{cases}2/3\to S_1\\1/3\to S_2\end{cases}$ $E_1=3$

$E_1=\frac{2}{3}E_1+1$

$E_0=\frac{4}{9}E_0+\frac{4}{9}E_1+1$

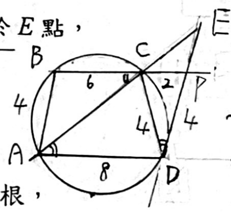
$\Rightarrow E_0=21/5$

$\frac{8}{3}$ 7. 已知梯形$ABCD$內接於一圓，其中$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$。過$D$點作圓的切線交直線$AC$於$E$點，若$\overline{DE}\,/\!/\,\overline{AB}$，且$\overline{AD}=8$、$\overline{AB}=4$，則$\overline{CE}=$

$\boxed{7}$ $\overline{PD}^2=\overline{PC}\cdot\overline{PB}\Rightarrow\overline{PC}=2$

$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=48+16\Rightarrow\overline{AC}=8$

$\frac{2}{8}=\frac{\overline{CE}}{\overline{CE}+8}\Rightarrow\overline{CE}=8/3$



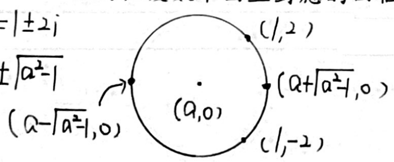
$\triangle ABC\sim\triangle ECD$

$\Rightarrow\overline{CE}=4\cdot\frac{4}{6}=\frac{8}{3}$

3 8. 已知a為正整數，若方程式$(z^2-2z+5)(z^2-2az+1)=0$有四個兩兩相異的根，且它們在複數平面上對應的四個點恰好共圓，則$a=$______。

$\boxed{8}$ $z=1\pm2i$

$z=a\pm\sqrt{a^2-1}$



$r^2=(a-1)^2+4=a^2-1\Rightarrow a=3$

114北一女

3. 有一矩形牆面由 18 個相同的正方形部分組成，牆面為 3 個正方形寬、6 個正方形高。

7200

今欲將矩形牆面的其中 9 個正方形塗成黑色，另外 9 個正方形塗成白色，並滿足

$\boxed{3}$

「整個牆面的任兩個橫列的塗色方式均不同」，請問共有多少種塗色方式？(本題 12 分)

令 p 為一列有 3 個 b 的列數，1 種
q ～ 2 ～ 3 種
r ～ 1 ～ 3 種
s ～ 0 ～ 1 種

$3p+2q+r=9$
$p+q+r+s=6$

p	q	r	s	
1	2	2	1	$C^3_2C^3_2\cdot 6!$
0	3	3	0	$C^3_3C^3_3\,6!$

$\Rightarrow 7200$

4. 有一款遊戲不定期推出促銷抽獎活動，在促銷時段遊戲公司宣稱玩家抽中大獎的機率是 10%。

設隨機變數 X 為首次抽中大獎的所需抽獎次數，小綠在促銷時段抽獎，直到第 22 次時才首次抽中大獎，請以顯著水準 $\alpha=0.1$ 計算抽獎次數 X 的拒絕域為何？

並判斷小綠可否據此拒絕承認「遊戲公司宣稱的大獎機率是 10%」的假設？(本題 12 分)

$\boxed{4}$

參考數據如下表：

$H_0: p=0.1$ vs. $H_1: p<0.1$

$p\text{-value} = P(n\geq 22 \mid p=0.1) = q^{21}p+q^{22}p+\cdots = \dfrac{q^{21}p}{1-q} = q^{21} > 0.1$

$\Rightarrow$ do not reject H_0

$p=0.1,\ q=1-p$

$P(X\geq k)<0.1$

$q^{k-1}p+q^{k}p+\cdots<0.1$

$\Rightarrow \dfrac{q^{k-1}p}{1-q}<0.1$

n	$(0.9)^n$	n	$(0.9)^n$	n	$(0.9)^n$
1	0.900000	11	0.313811	21	0.109419
2	0.810000	12	0.282430	22	0.098477
3	0.729000	13	0.254187	23	0.088629
4	0.656100	14	0.228768	24	0.079766
5	0.590490	15	0.205891	25	0.071790
6	0.531441	16	0.185302	26	0.064611
7	0.478297	17	0.166772	27	0.058150
8	0.430467	18	0.150095	28	0.052335
9	0.387420	19	0.135085	29	0.047101
10	0.348678	20	0.121577	30	0.042391

$\Rightarrow k-1\geq 22 \Rightarrow k\geq 23$

$\Rightarrow C=\{n \mid n\geq 23\}$

6 5. 已知斜率為 m 的直線 L 通過原點。若 L 與 $y=-x^2+2x+3$ 的圖形所圍出的封閉區域面積為 S，

$\dfrac{28\sqrt{7}}{3}$ 且 L 與 $y=-x^2+6x+7$ 的圖形所圍出的封閉區域面積也是為 S，試求 m 與 S 之值。(本題 13 分)

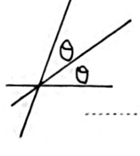
$\boxed{5}$ 令 $L: y=mx$ $\quad -x^2+(2-m)x+3=0$ $\quad \left((m-2)^2+12\right)^{\frac{3}{2}}=\left((m-6)^2+28\right)^{\frac{3}{2}}$ $\quad \Rightarrow S=\dfrac{1}{6}\cdot 4\times 7\times 2\sqrt{7}=\dfrac{28}{3}\sqrt{7}$

$S=\left|\dfrac{a}{6}(\alpha-\beta)^3\right|$ $\quad -x^2+(6-m)x+7=0$ $\quad \Rightarrow -4m+16=-12m+36+28 \Rightarrow m=6$

6. 已知雙曲線 Γ 的兩漸近線分別為 x 軸和直線 $24x-7y=0$，且點 $(1,2)$ 在 Γ 上，

$\boxed{6}$ 試求雙曲線 Γ 的貫軸長。(本題 13 分)

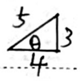
$y=\dfrac{24}{7}x$



$\tan 2\theta=\dfrac{24}{7}=\dfrac{2t}{1-t^2}$

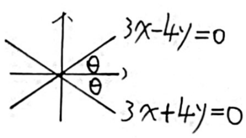
$\Rightarrow 12t^2+7t-12=0$

4 −3
3 +4



$(1+2i)\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i\right)$

$=2+1\times i$



$9x^2-16y^2=20 \Rightarrow 2a=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$