題目：空間中 n 個平面，至多可以將空間分割為 $B(n)$ 個區塊，求 $B(n)$ 。

答： $B(n)=\dfrac{n^3+5n+6}{6}$ 。

參考解法：

(1)先考慮二維平面上的 n 條直線，至多可以將平面分割為 $A(n)$ 個區域。

法一：觀察猜測

觀察可得 $A(1)=2, A(2)=4, A(3)=7, A(4)=11, \cdots$ ，猜測 $A(n)=A(n-1)+n$ 。

法二：

若平面上已有 $n-1$ 條直線，已將平面分割為最多 $A(n-1)$ 個區域。

若新增第 n 條直線，為使分割區域最多，須與前 $n-1$ 條直線各交一個相異點，得 $n-1$ 個交點。

此 $n-1$ 個交點將第 n 條直線分割為 n 個線段(或射線)。

此 n 個線段(或射線)均將其所在區域一分為二，
故新增第 n 條直線，新增的區域數為 n，即 $A(n)=A(n-1)+n$ 。

$$\begin{cases} A(2)=A(1)+2 \\ A(3)=A(2)+3 \\ \cdots \\ A(n)=A(n-1)+n \end{cases}$$
，累加得 $A(n)=A(1)+2+3+\cdots+n=\dfrac{n^2+n+2}{2}$ 。

(2)考慮三維空間中的 n 個平面，至多可以將空間分割為 $B(n)$ 個區塊。

觀察 $B(1)=2, B(2)=4, B(3)=8, B(4)=15, \cdots$ 。

若空間中已有 $n-1$ 個平面，已將空間分割為最多 $B(n-1)$ 個區塊。

若新增第 n 個平面，為使分割區塊最多，須與前 $n-1$ 個平面各交一條相異直線，得 $n-1$ 條交線。

此 $n-1$ 條交線將第 n 個平面分割為 $A(n-1)$ 個區域。

此 $A(n-1)$ 個區域均將其所在區塊一分為二，
故新增第 n 個平面，新增的區塊數為 $A(n-1)$ ，即 $B(n)=B(n-1)+A(n-1)$ 。

$$\begin{cases} B(2)=B(1)+A(1) \\ B(3)=B(2)+A(2) \\ \cdots \\ B(n)=B(n-1)+A(n-1) \end{cases}$$
，累加得 $B(n)=B(1)+\sum_{k=1}^{n-1} A(k)=2+\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{k^2+k+2}{2}=\dfrac{n^3+5n+6}{6}$ 。

關鍵字：遞迴，平面分割空間數。

一維：直线上 n 个点，最多將此直线分割成 1(初始狀態)+点数 $=1+n$ 个区域

二維：1(初始)+直线数+交点数 $=1+C^n_1+C^n_2$

三維：1(初始)+平面数+交线数+交点数 $=1+C^n_1+C^n_2+C^n_3$

多一个点、线、面 ⇒ 多一个区域

彬爸珍媽部落格
cplee8tcfsh@20110314