國立臺南家齊高級中等學校 114 學年度第一次教師甄選初試數學科題目卷

一、填充題(1~4 題每題 5 分， 5~10 題每題 6 分，11~13 題每題 8 分)

1. 設 $a,b,c,d\in R$，若 $a-2b+3c-4d=6$， $a^2+4b^2+9c^2+16d^2=12$，求 d 的最小值為________。

2. 從 1 到 2025 的自然數中，分別依下列方法得到集合 A 和集合 B：任選 5 個連續自然數相加，得到的和所形成的集合為 A；任選 7 個連續自然數相加，得到的和所形成的集合為 B。試問集合 A 和集合 B 中有______個相同的元素。

3. 令高斯符號 $[\,a\,]$ 表示小於或等於 a 的最大整數。已知 $x,y\in R^+$ 且滿足

$$\begin{cases}\left(x+[\,y\,]\right)^2=2025.114\\ \left([\,x\,]+y\right)^2=2025.1911\end{cases}$$，求 $[\,x-y\,]$ 的最大值為________。

4. 設 ω 為 $x^3=1$ 的一根，且 $\omega\neq 1$，今擲一公正骰子三次，得到的點數依序為 a,b,c，則 $\omega^a+\omega^b+\omega^c=0$ 的機率為__________。

5. 已知銳角 ΔABC 的垂心為 H，外心為 O，$\overline{BC}$ 之中點為 M。今自頂點 A 向 $\overleftrightarrow{BC}$ 作垂線交於 F，若 $HOMF$ 為矩形且 $\overline{HO}=5.5$，$\overline{OM}=2.5$，則 $\overline{BC}$ 長為__________。

6. 坐標平面上，P 為直線 $L\colon\ x+2y=10$ 上一點，$A(1,2)$，$B(4,-7)$，則當 P 坐標為__________時，$\angle APB$ 有最大值。

7. 已知 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$，若 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha-4\beta-6\gamma+13=0$，試求 $(\alpha-\delta-8)^2+(\beta-2\delta-9)^2+(\gamma-3\delta-10)^2$ 的最小值為________。

8. 已知曲線 $y=x^4+ax^3+ax^2+x+1$ 在點 $(0,1)$ 的切線，不只在點 $(0,1)$ 與曲線相切，試求 $a=$_____。

9 $x,y\in R$，已知 $x^2+xy+y^2=6$，若 x^2+y^2 的最大值為 M，最小值為 m，則數對(M,m)=_____。

10. 若點 $P(x,y)$ 與點 Q 對稱於直線 $y=2x+1$，點 Q 對原點 O 逆時針旋轉 45° 得 (x',y')，

若 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}$，求數對$(a,b,c)$=_________。

11. 已知一個非公正硬幣擲出正面機率為$\frac{1}{3}$、反面機率為$\frac{2}{3}$，今連續擲此硬幣，記錄每次擲出的結果，每次結果互不影響，令隨機變數X表示第一次看到正面、反面、正面依序出現所需的投擲次數，則X的期望值為__________。

12. 丟一顆公正骰子n次，第k次出現的點數為a_k，$k=1,2,3,\cdots,n$。令$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(6k-a_k\right)^5$，求$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^6}=$______。

13. 空間中一球面$S:x^2+y^2+z^2=4$，一平面$E:y-z=2$，若C為E與S所截的圓，則此圓C在xy平面投影的曲線方程式為__________。

二、計算證明題(共 20 分)

1. 已知實數a,b滿足$a+b\geq 3$，試證：$\left|a-2b^2\right|+\left|b-2a^2\right|\geq 6$。（限用現行高中課綱內的方法）(8 分)

2. 坐標平面上，Γ: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，$O$為原點，$P$為$\Gamma$上一點，過$P$點作$\Gamma$的的切線$L$，若$O$在$L$上的投影點為$N$，求$\Delta OPN$面積的最大值，此時$P$點坐標為何？(12 分)

一、填充題 (1~4 題每題 5 分， 5~10 題每題 6 分，11~13 題每題 8 分)

1. $-\frac{3}{4}$	2. 289	3. 44	4. $\frac{2}{9}$
5. 14	6. $(4\sqrt{2},5-2\sqrt{2})$	7. $22-2\sqrt{21}$	8. 4
9. (12,4)	10. $(\frac{-7\sqrt{2}}{10},\frac{\sqrt{2}}{10},\frac{\sqrt{2}}{10})$	11. $\frac{33}{2}$	12. 1296
13. $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{1}=1\\ z=0\end{cases}$			