臺北市立內湖高級中學

114 學年度第 1 次正式教師甄選數學科初選筆試題目卷

測驗說明：

(1) 本試題共 20 題填充題，每題 5 分，共 100 分。

(2) 請將正確答案填入答案卷的題格中，不需計算過程。

(3) 各題答案若非整數，以最簡分數或最簡根式作答。

一、填充題

1. 已知 x^{10} 除以 $(x+1)^3$ 的餘式為 $R(x)$，求 $R(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為_______。

2. 已知方程式 $\log x^{\log x}+\log x^3-5=0$ 的兩根為 α,β，求 $\alpha\beta$ 之值為_______。

3. 已知 a 為正實數，若函數 $f(x)=|x-a|+|x+1|$ 的圖形與 $y=\dfrac{5}{2}$ 所圍的圖形面積為 2，求 a 之值為_______。

4. 設 $\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$，若函數 $f(x)=|3\sin x+4\cos x|$ 在 $x=k$ 時有最大值，求 $\sin k-\cos k$ 為_______。

5. 若三角形 ABC 的三個高分別為 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，求三角形 ABC 的周長為________。

6. 已知 a,b 為實數，若函數 $f(x)=2ax^3-3ax^2+b$ 在 $0\le x\le 2$ 時有最大值 7，最小值 -3，求數對 (a,b) 為________。

7. 在空間中，正四面體 $ABCD$ 的稜長為 1，若 $\overline{AB},\overline{CD}$ 的中點分別為 E, F，且 G 為 ΔAEF 重心，求 $\overline{BG}$ 長度為________。

8. 已知一個底面半徑為 3，高也為 3 的直圓柱，平面 E 通過底面的直徑 $\overline{AB}$，且平面 E 與底面的夾角為 $45°$，此時平面 E 將直圓柱切割成兩部分，求較小那部分的體積為________。

9. 已知坐標平面上有一正方形 $ABCD$，若點 $E(6,0),F(6,6),G(0,8),H(-5,4)$ 分別在 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\overline{DA}$ 上，求正方形 $ABCD$ 的面積為_______。

10. 已知從 n 階方陣 $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$，$a_{ij}=\begin{cases}2, i<j\\0, i=j\\-1, i>j\end{cases}$ 中隨機取一元素，設隨機變數 X 表示取中的元素數值。若隨機變數 X 的變異數為 1.84，求 n 為_______。

11. 某實驗測得 20 組樣本點 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_{20},y_{20})$，已知 $\sum_{i=1}^{20}x_i=400,\sum_{i=1}^{20}y_i=900$，利用最小平方法求得 y 對 x 的迴歸直線方程式為 $y=ax+b$。若 $\sum_{i=1}^{20}(y_i-ax_i-b)^2=0$ 且 $(x_1,y_1)=(30,40)$，設 $x'=2x-4, y'=-3y+5, i=1,2,\cdots,20$，求數據 (x_i', y_i') 的迴歸直線方程式為_______。

12. 已知橢圓 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{75}=1$ 的中心為 O，且焦弦 $\overline{PQ}$ 與長軸夾角為 60°，求 ΔOPQ 面積為_______。

13. 已知梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 平行且 $\overline{AB}=10, \overline{CD}=5, \overline{AD}=2\sqrt{5}, \overline{BC}=5$。若 P 為 $\overline{AB}$ 上任一點，作 $\overline{PM}$ 垂直 $\overleftrightarrow{AD}$ 於 M，$\overline{PN}$ 垂直 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 N，求 ΔAPM 與 ΔBPN 的面積和最小值為_______。

14. 已知空間中兩直線 $L_1: \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ 與 $L_2: \dfrac{x-6}{-1}=\dfrac{y+1}{k}=\dfrac{z-6}{-2}$，其中 k 值是從集合 $\{1,2,3,4\}$ 中隨機任取一數，試問在直線 L_1 與 L_2 不重合的條件下，直線 L_1 與 L_2 為相交直線的機率為________。

15. 已知擲一公正骰子 4 次的點數分別為 a, b, c, d，求滿足 $\left|(a-b)(b-c)\right|+(c-d)^2=1$ 的機率為_______。

16. 已知空間中，點 $O(a,6,3)$ 與直線 $L: \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-b}{2}=\dfrac{z-c}{2}$ 皆在平面 $E: 2x+y-2z=8$ 上，且點 O 與直線 L 的距離為 6，求序對 (a,b,c) 為_______。

17. 已知空間坐標系有三個非零向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3), \overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3), \overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$，

若 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 0 & 25 & 0 \\ -6 & 0 & 16 \end{bmatrix}$，求 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 所決定的四面體體積為_______。

18. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{n+3}{n})+(\frac{n+3}{n})^2+\cdots+(\frac{n+3}{n})^{2n}}{n}$ 之值為_______。

19. 已知高斯符號 $[x]$ 表示不大於實數 x 的最大整數，若 $-2+\sum\limits_{k=1}^{2025}2^{[\sqrt{k}]}=p\cdot 2^{45}$，求實數 p 為_______。

20. 已知 k 為整數且方程式 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$ 有兩個相異整數根，求 k 值為_______。

臺北市立內湖高級中學

114 學年度第 1 次正式教師甄選數學科初選筆試答案卷

一、填充題 (每題 5 分，共 100 分)

1.	161	2.	$\frac{1}{1000}$	3.	$\frac{1}{2}$	4.	$\frac{1}{5}$
5.	$\frac{2\sqrt{15}}{5}$	6.	$(2,-1)$ 或 $(-2,5)$	7.	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	8.	18
9.	100	10.	5	11.	$y=\frac{3}{4}x-157$	12.	$20\sqrt{3}$
13.	$\frac{120}{11}$	14.	$\frac{3}{4}$	15.	$\frac{8}{81}$	16.	$(4,-6,-3)$ 或 $(4,18,9)$
17.	$5\sqrt{3}$	18.	$\frac{1}{3}(e^6-1)$	19.	88	20.	-2