新竹縣立湖口高中　114 年　第 1 次教師甄選

數學科　試題卷

(請考生自填)　准考證號碼：________________　　姓名：____________

一、填充題：每格 7 分，共 84 分（答案請以最簡形式表示）

1. 集合 $A=\{1,2,3,\cdots,20\}$，試求在集合 A 中任取三數恰出現兩個連續整數的機率為____________。

1、2、x
x、19、20 : $2\times C^{17}_1$
x、n、(n+1)、x : $17\times C^{16}_1$
$2\le n\le 18$

$\frac{2\times C^{17}_1+17\times C^{16}_1}{C^{20}_3}=\frac{17\times \cancel{18}}{\frac{\cancel{20}\times19\times\cancel{18}}{3\times\cancel{2}}}=\frac{51}{190}$

2. 已知 a,b,c 為正實數。若 $11,21,31$ 是方程式 $a^{\frac{1}{x}}b^{\frac{1}{x+3}}c^{\frac{1}{x+6}}=10$ 的三個根，則 abc 的值為____________。

$1=\frac{\log a}{x}+\frac{\log b}{x+3}+\frac{\log c}{x+6}$

$\Rightarrow x(x+3)(x+6)=\log a(x+3)(x+6)+\log b\, x(x+6)+\log c\, x(x+3)$

$\Rightarrow x^3+(9-\log(abc))x^2+(18-9\log a-6\log b-3\log c)x=0\Rightarrow 63=\log abc-9$

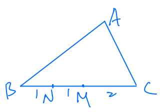
$\Rightarrow abc=10^{72}$

3. 設 $f(x)=\begin{cases}ax+b[x], & x\ge 2\\ x^2, & x<2\end{cases}$，其中 $[x]$ 表不大於 x 的最大整數，若函數 $f(x)$ 在 $x=2$ 處可微分，則數對 (a,b) 為____________。

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{a(2+h)+b[2+h]-2(a+b)}{h}=\lim_{h\to0}\left(a+\frac{b[h+2]-2b}{h}\right)=a=4$

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)\Rightarrow 2(a+b)=4\Rightarrow a+b=2\Rightarrow b=-2$

4. 設 ΔABC 中，M 是 $\overline{BC}$ 中點，N 是 $\overline{BM}$ 中點，若 $\angle A=\frac{\pi}{3}$ 且 ΔABC 面積為 $2\sqrt{3}$，則 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的最小值為 ______________。



$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\left(\frac12\overrightarrow{AB}+\frac12\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac34\overrightarrow{AB}+\frac14\overrightarrow{AC}\right)$　　$2\sqrt3=\frac12 bc\times\frac{\sqrt3}{2}\Rightarrow bc=8$

$=\frac18|\overrightarrow{AC}|^2+\frac38|\overrightarrow{AB}|^2+\frac12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\frac14\times\frac{b^2+3c^2}{2}+\frac12 bc\times\frac12$

$\ge\frac14\times\sqrt3 bc+\frac14\times8=\frac14\times8\sqrt3+2=2\sqrt3+2$

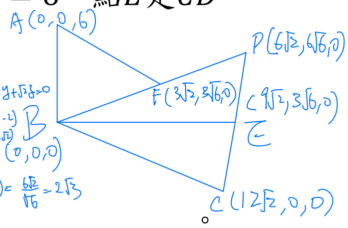
$\frac14\times\frac{b^2+3c^2}{2}\ge\frac14\sqrt3\times bc=2\sqrt3+2$

5. 設四面體 $A-BCD$ 中，底面是邊長為 $12\sqrt{2}$ 的正 ΔBCD，$\overline{AB}$ 垂直於底面且 $\overline{AB}=6$，點 E 是 $\overline{CD}$ 中點、點 F 是 $\overline{BD}$ 中點，則 $\overleftrightarrow{AF}$ 和 $\overleftrightarrow{BE}$ 兩直線的距離為 ______________。

$\overrightarrow{AF}=(3\sqrt2,3\sqrt6,-6)=3\sqrt2(1,\sqrt3,-\sqrt2)$　　$E_1: x-\sqrt3y+\sqrt2z=0$

$\overrightarrow{BE}=(9\sqrt2,3\sqrt6,0)=3\sqrt6(\sqrt3,1,0)$　　$\vec{n}=(\sqrt2,-\sqrt6,-2)=\sqrt2(1,-\sqrt3,\sqrt2)$

$d(A,E)=\frac{6\sqrt2}{\sqrt6}=2\sqrt3$



6. 若兩正數 α,β 滿足 $\log_9\alpha=\log_{12}\beta=\log_{16}(\alpha+\beta)$，則 $\log_{25}\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$ 的值為______________。

令 $k=\log_9\alpha=\log_{12}\beta=\log_{16}(\alpha+\beta)$　　$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac43\right)^k+\left(\frac34\right)^k=\sqrt5$

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=9^k\\ \beta=12^k\\ \alpha+\beta=16^k\end{cases}\Rightarrow 9^k+12^k=16^k\Rightarrow\left[\left(\frac34\right)^k\right]^2+\left(\frac34\right)^k-1=0\Rightarrow\left(\frac34\right)^k=\frac{-1+\sqrt5}{2}$　　原式 $=\log_{25}\sqrt5=\frac14$

7. 設實數 α、β 滿足 $\alpha^3+6\alpha^2+14\alpha+11=0$ 和 $\beta^3+6\beta^2+14\beta+13=0$，則 $\alpha+\beta$ 的值為 ______________。

$\left[(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\right]+6\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]+14(\alpha+\beta)+24=0$

設 $\alpha+\beta=k\Rightarrow(k^3-3\alpha\beta k)+6k^2-12\alpha\beta+14k+24=0$

$\Rightarrow k^3+6k^2+(14-3\alpha\beta)k+24-12\alpha\beta=0$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +6 & +(14-3\alpha\beta) & +(24-12\alpha\beta) & -4\\ & -4 & -8 & -(24-12\alpha\beta) & \\ \hline 1 & +2 & +(6-3\alpha\beta) & +0 & \end{array}$$

$\Rightarrow(k+4)\left[k^2+2k+3(2-\alpha\beta)\right]=0$

$\Rightarrow k=-4$

8. 求值：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)(1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5)}{(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)(1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4)}=$ ____________。(化為最簡)

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3\times\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^2\times\frac{1}{n}\times n^6\times\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^5\times\frac{1}{n}}{n^4\times\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^3\times\frac{1}{n}\times n^5\times\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^4\times\frac{1}{n}}=\frac{\int_0^1x^2dx\times\int_0^1x^5dx}{\int_0^1x^3dx\times\int_0^1x^4dx}=\frac{\frac13x^3|_0^1\times\frac16x^6|_0^1}{\frac14x^4|_0^1\times\frac15x^5|_0^1}=\frac{\frac13\times\frac16}{\frac14\times\frac15}=\frac{\cancel{4}^{2}\times5}{3\times\cancel{6}_{3}}=\frac{10}{9}$

9. 已知 A,B 兩定點在拋物線 $y^2=8x$ 上且位於對稱軸的異側，若 F 是拋物線的焦點且

$x^2=8y$ $A(-4,2)$ $B(8,8)\Rightarrow\overline{AB}=\sqrt{6^2+12^2}=6\sqrt5$, $m_{AB}=\frac12$

$\overline{FA}=4,\overline{FB}=10$，$P$ 是拋物線上在 AOB 弧線上的一個動點（其中 O 為座標原點），則 ΔAPB

$\Rightarrow y=\frac18x^2$ $f'(x)=\frac14x$ $\frac14a=\frac12\Rightarrow a=2\Rightarrow P(2,\frac12)$

的最大面積為 ____________。

$L: x-2y-1=0$ 過P的切線

$h=d(A,L)=\frac{9}{\sqrt5}$ ∴ $\Delta=\frac12\times\cancel{6\sqrt5}^{3}\times\frac{9}{\cancel{\sqrt5}}=27$

10. 設實係數四次多項式函數 $f(x)$ 的最高次項係數為 1，若 $f(1)=1,\ f(2)=4,\ f(3)=9$，則 $f(-7)+f(11)$ 之值為 ____________。

設 $f(x)=(x-a)(x-1)(x-2)(x-3)+x^2$

$\Rightarrow f(-7)=(7+a)\times(+8)\times(+9)\times(+10)+49$

$f(11)=(11-a)\times10\times9\times8+121$

$\Rightarrow f(-7)+f(11)=720\times18+170=13130$

11. 設 $z=1+\cos20°+i\sin20°$，若 $z^n\in\mathbb{R}$ 且 $30<n<300$，$n\in\mathbb{N}$，則所有 n 值的和為 ____________。

令 $\theta=10°=\frac{\pi}{18}$

$\Rightarrow z^n=2^n\cos^n\theta(\cos n\theta+i\sin n\theta)\in\mathbb{R}$ ∴ n的總和 $=\frac{2+16}{2}\times15\times18=2430$

$\Rightarrow n\theta=n\times\frac{\pi}{18}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow n=18k\Rightarrow30<18k<300$

$\Rightarrow5<3k<50\Rightarrow k=2,4,\cdots,16$

12. 已知 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，試求 $[(\sqrt2+\sqrt3)^{2004}]$ 的個位數為____________。

$[(\sqrt3+\sqrt2)^4]^{501}=[(5+2\sqrt6)^2]^{501}=(49+20\sqrt6)^{501}=49^{501}+C_1^{501}\times49^{500}\times20\sqrt6+C_2^{501}(20\sqrt6)^2\times49^{499}$

$(49-20\sqrt6)^{501}=49^{501}-C_1^{501}\times49^{500}\times20\sqrt6+C_2^{501}(20\sqrt6)^2\times49^{499}$

$2\times49^{501}\equiv2\times9^{501}\equiv2\times9=18\equiv8$ ∴ $8-1=7$

∵ $0<[(\sqrt3-\sqrt2)^{2004}]<1$

二、計算證明題：每題 8 分，共 16 分（請標明題號）

1. 證明：若隨機變數 X 的機率分布為二項分布 B（n，p），則隨機變數 X 的期望值為 np。(8 分)

∵ $P(X=k)=C_k^np^k(1-p)^{n-k}$

$\Rightarrow E(x)=\sum_{k=1}^{n}kC_k^np^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\cancel{k}\times\frac{\overbrace{n!}^{n\times(n-1)!}}{(k-1)!\cancel{k}(n-k)!}\times\overbrace{p^k}^{p\times p^{k-1}}(1-p)^{n-k}$

$=n\times p\sum_{k=1}^{n}C_{k-1}^{n-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=np\times[p+(1-p)]^{n-1}=np\times1^{n-1}=np$

2. 已知 n 為正整數，若方程式 $x^2+(\frac12n+1)x+(n^2-2)=0$ 的兩根為 α_n,β_n，則求

$\frac{1}{(\alpha_3+2)(\beta_3+2)}+\frac{1}{(\alpha_4+2)(\beta_4+2)}+\cdots\frac{1}{(\alpha_{2011}+2)(\beta_{2011}+2)}$ 的值。(8 分)

令 $f(x)=x^2+(\frac{n}{2}+1)x+(n^2-2)=(x-\alpha_n)(x-\beta_n)$

∴ $(2+\alpha_n)(2+\beta_n)=f(-2)=4+(-n-2)+(n^2-2)=n(n-1)$

原式 $=\sum_{k=1}^{2009}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{2009}(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2})$

$=[(\frac12-\cancel{\frac13})+(\cancel{\frac13}-\cancel{\frac14})+\cdots+(\cancel{\frac{1}{2009}}-\cancel{\frac{1}{2010}})+(\cancel{\frac{1}{2010}}-\frac{1}{2011})]=\frac{2009}{4022}$

(請考生自填)　准考證號碼：________________　　姓名：____________

----------彌封線----------(彌封線以下不得書寫個人准考證號碼及姓名等相關個人資料)----------彌封線----------

新竹縣立湖口高中　114 年　第 1 次教師甄選

數學科　解答卷

總分			
初核		複核	

一、填充題：每格 7 分，共 84 分（答案請以最簡形式表示）

1. $\frac{51}{190}$	2. 10^{72}	3. $(4,-2)$
4. $2+2\sqrt{3}$	5. $2\sqrt{3}$	6. $\frac{1}{4}$
7. -4	8. $\frac{10}{9}$	9. 27
10. 13130	11. 2430	12. 7