新竹縣立湖口高中　114 年　第 1 次教師甄選

數學科　試題卷

(請考生自填)　准考證號碼：________________　　姓名：____________

一、填充題：每格 7 分，共 84 分（答案請以最簡形式表示）

1. 集合 $A=\{1,2,3,\cdots,20\}$，試求在集合 A 中任取三數恰出現兩個連續整數的機率為____________。

2. 已知 a,b,c 為正實數。若 $11,21,31$ 是方程式 $a^{\frac{1}{x}}b^{\frac{1}{x+3}}c^{\frac{1}{x+6}}=10$ 的三個根，則 abc 的值為____________。

3. 設 $f(x)=\begin{cases} ax+b[x], & x\ge 2 \\ x^2, & x<2 \end{cases}$，其中 $[x]$ 表不大於 x 的最大整數，若函數 $f(x)$ 在 $x=2$ 處可微分，則數對 (a,b) 為____________。

4. 設 ΔABC 中，M 是 $\overline{BC}$ 中點，N 是 $\overline{BM}$ 中點，若 $\angle A=\frac{\pi}{3}$ 且 ΔABC 面積為 $2\sqrt{3}$，則 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的最小值為 ________________。

5. 設四面體 $A-BCD$ 中，底面是邊長為 $12\sqrt{2}$ 的正 ΔBCD，$\overline{AB}$ 垂直於底面且 $\overline{AB}=6$，點 E 是 $\overline{CD}$ 中點、點 F 是 $\overline{BD}$ 中點，則 $\overleftrightarrow{AF}$ 和 $\overleftrightarrow{BE}$ 兩直線的距離為 ________________。

6. 若兩正數 α,β 滿足 $\log_9\alpha=\log_{12}\beta=\log_{16}(\alpha+\beta)$，則 $\log_{25}\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$ 的值為________________。

7. 設實數 α、β 滿足 $\alpha^3+6\alpha^2+14\alpha+11=0$ 和 $\beta^3+6\beta^2+14\beta+13=0$，則 $\alpha+\beta$ 的值為______________。

8. 求值：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)(1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5)}{(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)(1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4)}=$ ____________________。(化為最簡)

9. 已知 A,B 兩定點在拋物線 $y^2=8x$ 上且位於對稱軸的異側，若 F 是拋物線的焦點且 $\overline{FA}=4,\overline{FB}=10$，$P$ 是拋物線上在 AOB 弧線上的一個動點(其中 O 為座標原點)，則 ΔAPB 的最大面積為 ______________。

10. 設實係數四次多項式函數 $f(x)$ 的最高次項係數為 1，若 $f(1)=1,\ f(2)=4,\ f(3)=9$，則 $f(-7)+f(11)$ 之值為 _____________。

11. 設 $z=1+\cos20°+i\sin20°$，若 $z^n\in\mathbb{R}$ 且 $30<n<300$，$n\in\mathbb{N}$，則所有 n 值的和為 ____________。

12. 已知 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，試求 $[(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2004}]$ 的個位數為____________。

二、計算證明題：每題 8 分，共 16 分（請標明題號）

1. 證明: 若隨機變數 X 的機率分布為二項分布 B（n，p），則隨機變數 X 的期望值為 np。(8 分)

2. 已知 n 為正整數，若方程式 $x^2+(\frac{1}{2}n+1)x+(n^2-2)=0$ 的兩根為 α_n,β_n，則求 $\frac{1}{(\alpha_3+2)(\beta_3+2)}+\frac{1}{(\alpha_4+2)(\beta_4+2)}+\cdots\frac{1}{(\alpha_{2011}+2)(\beta_{2011}+2)}$ 的值。(8 分)