桃園市立武陵高級中等學校114學年度第一學期第1次正式教師甄選

<u>數學科</u> 初試試題卷　　　**甄選證號：＿＿＿＿＿＿＿＿（請自行填寫）**

※ 應試說明：

★每張答案卷已標明題號，請依序作答，不可顛倒錯置。

★不得要求增補答案卷；考試結束，題目卷與答案卷請於交卷時一併繳回，**<u>禁止攜出試場</u>**。

一、填充題（每題 7 分；共 70 分）

1. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{1\cdot 2+2\cdot 3}+\dfrac{1}{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}+\ldots=$＿＿＿＿＿。

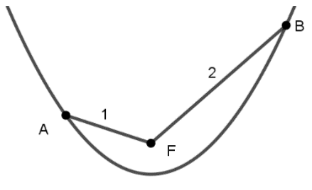
2. 實數 a,b,c 皆不為 0，直線 $L_1:\dfrac{x-4}{a}=\dfrac{y-4}{b}=\dfrac{z-6}{c}$ 與 $L_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}$ 交於一點 P，

   且 L_1 與 $L_3:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-4}{2}$ 交於一點 Q，試求向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的坐標表示法為＿＿＿＿＿。

3. 已知 $f(x)=\left|2\cos 3x+1\right|$，$0\le x\le 6\pi$；若 $f(x)=1$ 恰有 n 個相異實數解，則 $n=$＿＿＿＿＿。

4. 如圖為一拋物線，其中 F 為交點，A、B 為拋物線上相異兩點，F 在 $\overline{AB}$ 與拋物線所夾內部區域。

   已知 $\overline{AF}=1$，$\overline{BF}=2$，$\angle AFB=120°$，求此拋物線正焦弦長為＿＿＿＿＿。



5. 一個半徑為 1 之小球在一個內壁邊長為 $6\sqrt{6}$ 之正四面體容器內，小球可向各方向自由運動，
   則在四面體容器的內壁不會被小球接觸到的面積總和為＿＿＿＿＿。

6. 若設坐標平面上有曲線$\Gamma_1 : y=3x-x^2$與$\Gamma_2 : y=mx$。Γ_1與x軸所圍的面積A被直線$\Gamma_2 : y=mx$平分成二等分，求m之值為__________。

7. 從 1,2,3,4,5,6,7 這七個數中，取出任意數字組合，組合內的數字不重複(數字組合可以取 1 到 7 個數字，但是不可以不取任何數字。例：3 是取一個數字的組合；1,2,5 是取三個數字的組合)，而且每種被取出的數字組合的機率皆相等。則其數字組合的乘積是一完全平方數的機率為__________。

8. 設實數a、b滿足$\begin{cases} a^3+3a^2+3a=7 \\ b^3+3b^2+3b=-9 \end{cases}$，則$a+b$的值為__________。

9. 空間座標中兩平面E_1：$2x-2y+z=1$、E_2：$4x-y-z=2$，而L為E_1、E_2的交線，且E_1上有兩點$A(-2,1,7)$、$B(-1,0,3)$。若在平面E_1上以A、B為焦點作橢圓Γ，且Γ在E_1上與L相切於P。則P點坐標為__________。

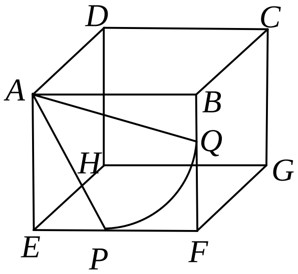
10. 函數$f(x)$在$[1,3]$上連續且滿足$f(x)=-x+\int_1^3 |f(t)|\,dt$，則$f(2)=$__________。

二、計算證明題：(每題 10 分；共 30 分)

1. 已知雙曲線$\Gamma:\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{15}=1$的焦點為$F_1$、$F_2$。假設$P(a,b)$為$\Gamma$上異於頂點的動點。

 若$r(a)$為ΔPF_1F_2的內切圓半徑，則$\lim\limits_{a\to\infty}r(a)=$______

2. 右圖為示意圖，已知正方體$ABCD-EFGH$之邊長為 3，另有以A為球心，$2\sqrt{3}$為半徑之球面，問球面與正立方體表面所交出之曲線長為何？



3. 一個 $2n$ 位正整數，若將其中任意兩個位數的數字互換得到一個新的 $2n$ 位正整數，稱之為一次交換。例：將「3698170230」中的 3 跟 6 一次交換可以得到「6398170230」；將「29250410」中的 9 跟 0 一次交換可以得到「20250419」。證明：任意 $2n$ 位的正整數可經過有限次的交換，使得前 n 位的數字和與後 n 位的數字和，兩者差的絕對值小於等於 9，其中 n 為正整數。