

填充

- 顯然 $(a, b, c) = (3t, 4t, 12t)$ 且 $-1 < t < 0$ ，取 $(a, b, c) = (-1.5, -2, -6)$ 代入得 $\frac{74}{13}$ 。
- $\tan 12^\circ \tan 94^\circ \tan(94^\circ - 12^\circ) + \tan 12^\circ - \tan 94^\circ = \frac{\tan 12^\circ - \tan 94^\circ}{1 + \tan 12^\circ \tan 94^\circ} = \tan(-82^\circ) = \tan 278^\circ$
- $2n+1$ 中， $2n$ 獎金必送出 20 元，只要考慮每個人拿到 +1 機率，即 $1 - \frac{5^{10}}{6^{10}}$ ，期望值 $20 + 6 \times \left(1 - \frac{5^{10}}{6^{10}}\right) \approx 25.031$ 。
- 迭代幾次發現 $f_1(x) = \frac{2x-7}{x+1}$ ， $f_2(x) = \frac{x+7}{2-x}$ ， $f_3(x) = x$ 。則 $f_{13}(x) = f_1(x) = \frac{2x-7}{x+1}$ ， $f_{23}(x) = f_2(x) = \frac{x+7}{2-x}$ ， $f_{36}(x) = f_3(x) = x$ ，以等差計算 $\frac{2t-7}{t+1} + t = 2 \times \frac{t+7}{2-t} \Rightarrow t = -4$ ， $f_1(t) = 5$ ， $f_2(t) = \frac{1}{2}$ ， $f_3(t) = -4$ ， $\log(f_1(t) \times f_2(t) \times \cdots \times f_{115}(t)) = \log((-10)^{38} \times 5) \approx 38.7$
- 在拋物線 $y = x^2$ 上斜率為 m 的切線為 $m\left(x - \frac{m}{2}\right) = y - \frac{m^2}{4} \Rightarrow m^2 - 4mx + 4y = 0$ ，若過 $P(a, b)$ 的方程式 $\Rightarrow m^2 - 4ma + 4b = 0$ 之兩根 m_1, m_2 滿足 $m_1 + m_2 = 4a, m_1 m_2 = 4b$ ，則 $|m_1 - m_2| = \sqrt{(4a)^2 - 16b}$ ，且 $4 = \frac{|m_1 - m_2|}{1 + m_1 m_2} = \frac{\sqrt{(4a)^2 - 16b}}{1 + 4b} \Rightarrow a^2 - 16b^2 - 9b - 1 = 0$
- 取參數式 $x = 2\cos\theta$ ， $y = 2\sin\theta$ ，則 $\frac{4}{x^2} + \frac{6y}{x} = \tan^2\theta + 1 + 6\tan\theta = (\tan\theta + 3)^2 - 8$
- $\sum_{k=1}^{2025} k^2 C_k^{2025} = 2025 \sum_{k=0}^{2024} k C_{k-1}^{2024} = 2025 \sum_{k=0}^{2024} C_{k-1}^{2024} + 2025 \sum_{k=0}^{2024} (k-1) C_{k-1}^{2024} = 2025 \times (2^{2024} + 2024 \times 2^{2023}) = 2025 \times 2^{2023} (2 + 2024)$ ，除 1000 的餘數為 200
- 將法向量 $(3, \sqrt{5}, 6)$ 與 z 軸方向 $(0, 0, 1)$ 夾角的餘弦值為 $\frac{6}{\sqrt{50}}$ ，則取法向量 $(\sqrt{14}, 0, 6)$ 且過點 $(0, 0, 11)$ 的平面 $\sqrt{14}x + 6z = 66$ ，在 xz 平面取所圍三角形內接圓，即取 $\begin{cases} 5x + 5z = 0 \\ \sqrt{14}x + 6z = 66 \end{cases}$ 的銳角平分線 $(5 + \sqrt{14})x + 11z = 66$ ，交 z 軸 $(0, 0, 6)$ ，此時最大內接球半徑為 $3\sqrt{2}$
- 令 $x = \sqrt{5}t$ ， $y = \sqrt{2}t$ 時， $z \leq 10 - 10t^2$ ，截面 $A_1(t) = 4\sqrt{10}t^2$ ，可視為 $z \in [0, 10]$ 時截面 $A_2(z) = 4\sqrt{10} - \frac{4\sqrt{10}}{10}z \Rightarrow \int_0^{10} A_2(z) dz = 4\sqrt{10}z - \frac{4\sqrt{10}}{20}z^2 \Big|_0^{10} = 20\sqrt{10}$
- 解法一：
 - 令 $b = \frac{cd}{a}$ ，則 $a + \frac{cd}{a} + c + d = (a+d)\left(\frac{a+c}{a}\right) = 203 \Rightarrow (a+d)(a+c) = 7 \times 29 \times a$ ，此時 7 與 29 須分別為 $a+c$ 及 $a+d$ 的因數。
 - 接下來，不失一般性先假設 a 最小， b 最大，且 $a+c = 29p \Rightarrow b+d = 29(7-p) \Rightarrow c = 29p - a$ ， $d = 29(7-p) - b$ ， $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 。又 $a < c < b$ ， $a < d < b \Rightarrow a < 29p - a < b$ ， $a < 29(7-p) - b < b \Rightarrow 2a < 29p < a+b < 29(7-p) < 2b$ ，此時只剩 $p = 1, 2, 3$ 。
 - 整理列舉
 - $a+c = 29 \Rightarrow a+d = 7a \Rightarrow d = 6a$ ， $a = 1, 2, 3, \dots, 14$ ，有 14 解

ii. $a+c=58 \Rightarrow 2a+2d=7a \Rightarrow 2d=5a$, $a=2,4,6,\dots,28$, 有 14 解

iii. $a+c=87 \Rightarrow 3a+3d=7a \Rightarrow 3d=4a$, $a=3,6,9,\dots,42$, 有 14 解

共 42 個組合。

(4) 最後組合有 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 種排法，共有 $42 \times 8 = 336$ 個序組。

整理後速解二：

令 p 為 a, c 的 gcd， q 為 b, d 的 gcd，則有 r, s 使得 $a = pr$ ， $b = qs$ ， $c = ps$ ， $d = rq$ ，代入使

$a+b+c+d = (p+q)(r+s) = 7 \times 29$ 。此時只有兩種可能 $\begin{cases} p+q=7 \\ r+s=29 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} p+q=29 \\ r+s=7 \end{cases}$ ，則正整數序組

只有 $2 \times 6 \times 28 = 336$ 個。

計算證明

1. 整理為 $((\log_5 x)^2 - 8\log_5 x + 3)a + (1 - (\log_5 x)^2) = F(a)$ ，即 $F(a)$ 為 a 的一次函數，則

$$\begin{cases} F(0) > 0 \\ F(1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - (\log_5 x)^2 > 0 \\ 4 - 8\log_5 x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{5} < x < 5 \\ x < \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{5} < x < \sqrt{5}$$

2. 令原方程的 n 個根為 $r_1, r_1, r_1, \dots, r_n$ ，則所有根乘積為 $\frac{(-1)^n}{a_n}$ ；所有根取 $n-1$ 個互相乘積之和為

$\frac{(-1)^{n-1}}{a_n}$ ；所有根取 $n-2$ 個互相乘積之和為 $\frac{(-1)^n}{a_n}$ 。依此整理出 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} = -1$ ， $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{r_i r_j} = 1$ ，則

$$1 = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r_i} \right)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{r_i r_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r_i} \right)^2 + 2 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \right)^2 = -1$$

則 $r_1, r_1, r_1, \dots, r_n$ 中必有虛數根。再因實係數多項式恆有虛根成對，至少有 2 個虛數根。

3. 已知 $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ ，且在 $x \in (0, 1)$ 時， $(1+x^6+x^{12}+\dots) - (x^4+x^{10}+x^{16}+\dots) = \frac{1}{1-x^6} - \frac{x^4}{1-x^6}$ 。

$$\text{則原式} = \int \left(\frac{1-x^4}{1-x^6} \right) dx = \int \left(\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4} \right) dx = \int \left(\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4} \right) dx, \text{ 令 } t = x - \frac{1}{x}, t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = 1 + \frac{1}{x^2}, \text{ 則 } \int_0^1 \left(\frac{\frac{1}{x^2} + 1}{\frac{1}{x^2} + 1 + x^2} \right) dx = \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{t^2 + 3} \right) dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[0 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

4. 不失一般性，令 $A(0,0)$ ， $D(1,0)$ ， $E(r \cos \beta, r \sin \beta)$ ， $\overline{AD} \cdot \overline{AE} = r \cos \beta$ ，則 $\overline{AB} = 2\overline{AD} - \overline{AE}$ ，

$$\overline{AC} = 2\overline{AE} - \overline{AD}, \text{ 則 } \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}, \tan \alpha = \frac{\sqrt{|\overline{AB}|^2 |\overline{AD}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AD})^2}}{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}$$

$$= \frac{\sqrt{|2\overline{AD} - \overline{AE}|^2 |\overline{AD}|^2 - ((2\overline{AD} - \overline{AE}) \cdot \overline{AD})^2}}{(2\overline{AD} - \overline{AE}) \cdot \overline{AD}} = \frac{\sqrt{r^2 - 4r \cos \beta + 4 - (2 - r \cos \beta)^2}}{2 - r \cos \beta} = \frac{r \sin \beta}{2 - r \cos \beta},$$

$$\tan \gamma = \frac{\sqrt{|\overline{AC}|^2 |\overline{AE}|^2 - (\overline{AC} \cdot \overline{AE})^2}}{\overline{AC} \cdot \overline{AE}} = \frac{\sqrt{|2\overline{AE} - \overline{AD}|^2 |\overline{AE}|^2 - ((2\overline{AE} - \overline{AD}) \cdot \overline{AE})^2}}{(2\overline{AE} - \overline{AD}) \cdot \overline{AE}}$$

$$= \frac{\sqrt{(4r^2 - 4r \cos \beta + 1)r^2 - (2r^2 - r \cos \beta)^2}}{2r^2 - r \cos \beta} = \frac{\sin \beta}{2r - \cos \beta}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{則} \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma}{\tan \alpha \tan \gamma} &= \frac{2 - r \cos \beta}{r \sin \beta} \times \frac{2r - \cos \beta}{\sin \beta} \times \left(\frac{r \sin \beta}{2 - r \cos \beta} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} + \frac{\sin \beta}{2r - \cos \beta} \right) = \dots \text{省略} \dots \\
 &= \frac{4 - \cos^2 \beta}{\cos \beta \sin \beta} = \frac{4 \sec^2 \beta - 1}{\tan \beta} = \frac{4 \tan^2 \beta + 3}{\tan \beta}
 \end{aligned}$$