高雄市立高雄高級中學114學年度正式教師甄選數學科題目卷

第一部分：計算證明題(每題6分，共計30分。請在答案卷上作答，請清楚註明題號並須寫出計算過程或證明理由，否則將酌予扣分)

1. 設一箱中有4個球，分別標示數字0、4、1、3；今一次取一球記錄球上的數字後，再放回箱中，共取114次。若每次每球被取中的機會均等，則共有奇數次取中1號球的機率為？

2. 坐標空間中，已知$\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=(-12,9,8)$，$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(-10,8,6)$，

   $\overrightarrow{b}=(1,2,t)$，$t\in R$，則$\overrightarrow{a}=$？

3. 已知A、B分別是Γ_1:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (a>b>0)的兩焦點且焦距長的一半記為c，

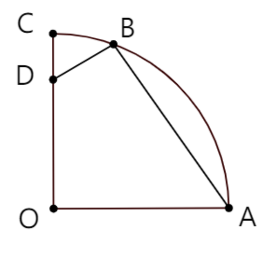
   現有Γ_1上的動點P。若$\angle PAB=\alpha$、$\angle PBA=\beta$，

   試求$tan\frac{\alpha}{2}\cdot tan\frac{\beta}{2}=$？ (請以a,b,c的關係式表示)

4. 某校高二有兩個文史法政學群的班級，
   第一個班有n_1位學生：上次月考數學B科成績平均為μ_1分、標準差σ_1分；
   第二個班有n_2位學生：上次月考數學B科成績平均為μ_2分、標準差σ_2分。
   若這兩班學生共(n_1+n_2)位學生的上次月考數學B科成績標準差為σ分。
   試討論σ_1、σ_2、σ三者大小關係的可能情形。

5. 扇形OAC中，O為圓心，$\overset{\frown}{AC}$上有一點B，$\overline{OC}$上有一點D，

   $\angle AOC=\angle ABD=90^\circ$，$\overline{BD}=7$，$\overline{AB}=24$，求此扇形之面積。



第二部分：計算證明題(每題 7 分，共計 70 分。請在答案卷上作答，請清楚註明題號並須寫出計算過程或證明理由，否則將酌予扣分)

6. 若 $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^{2025} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \\ \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \end{bmatrix} \right\}^{114} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$，求$a+b+c+\mathrm{d}=$？

7. 空間坐標系中，

有三個平面$E_1: z=3$、$E_2: x-y+z=6$、$E_3: x+y-z=2$。

令E_1與E_2相交的直線為L_3；E_2與E_3相交的直線為L_1；E_3與E_1相交的直線為L_2。

已知三直線L_1、L_2、L_3有共同交點 P，若 A、B、C 分別在L_1、L_2、L_3上，且 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=\sqrt{2}$。

試求：(1) 四面體$PABC$ 的體積為？

(2) 過A、B、C 三點的平面有幾種可能？方程式為何？

8. 某籃球員在 NBA 冠軍賽 4 場比賽中，一共得到 25 分，其 3 分球(每命中一球得 3 分)之命中率近似值為 13%。設此球員在此 4 場比賽中 3 分球一共出手 n 球，命中 k 球，在現有的資訊條件下，求使其命中率最接近 13%之數對(n,k)＝？

9. 空間中兩直線L_1與L_2互為歪斜線，若L_1上有相異三點 A、B、C 滿足$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$

且 A 點到L_2的距離為 1；B 點到L_2的距離為$\sqrt{3}$；C 點到L_2的距離為$\sqrt{7}$；

試求L_1與L_2的公垂線段長。

10. 已知 $p\neq 0$，α、β、γ 為 $x^3-px+p^3=0$ 的三個根，試以 p 表示 $\frac{\alpha-p}{\alpha+p}+\frac{\beta-p}{\beta+p}+\frac{\gamma-p}{\gamma+p}$ 之值。

11.$n=\prod_{k=1}^{20}(k!)$，$m\in\mathrm{N}$，$\frac{n}{m}$為完全平方數，求滿足條件的最小 m 值。

12.滿足$4{Z_1}^2+5{Z_2}^2+4{Z_3}^2=4Z_1Z_2+6Z_2Z_3+4Z_3Z_1$，若複數平面上以$Z_1$、$Z_2$、$Z_3$為頂點的三角形，其三邊長由小到大分別為$a$、$b$、$c$且$a:b:c=2:r:s$，則$rs=$？

13. 已知等差數列$\{a_n\}$中，$a_2=5$，$a_6=21$，若數列$\{\frac{1}{a_n}\}$的前n項和為S_n，
若$S_{2n+1}-S_n\le\frac{k}{15}$，對所有的正整數 n 恆成立，試求實數$k$的取值範圍。

14.已知斜率為m的直線L交三次曲線$\Gamma: y=f(x)=ax^3+px$於相異三點A、B、C，
若L_1、L_2、L_3分別是曲線Γ在A、B、C三點的切線，
且L_1、L_2、L_3均與曲線Γ有另一交點，分別為P、Q、R三點。
試證P、Q、R三點共線；並以m、a、p表示過P、Q、R三點直線的斜率。

15.二階方陣 A 滿足 $A^T=A^{-1}$，證明：A 必為平面變換中的旋轉矩陣或鏡射矩陣。