新北市立板橋高級中學 114 學年度	准考證號	
第一次教師甄選【數學科】試題卷		

一、填充題（每題 6 分，10 題，共 60 分）

1. 已知 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\sqrt{(a+3)^2+(b+4)^2+(c+12)^2}=13$，求 $\dfrac{6a+3b+2c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+\dfrac{20a+5b+4c+128}{\sqrt{(a+3)^2+(b+4)^2+(c+12)^2}}$ 之值。(其中分母皆不為 0)

2. 已知 $\tan 12^\circ \tan 94^\circ \tan 82^\circ+\tan 12^\circ-\tan 94^\circ=\tan k^\circ$，且 $180<k<360$，求 k 之值。

3. 有編號 1~10 的 10 顆球，將每顆球隨機分給甲、乙、丙、丁、戊、己等六人，分完後，若某人持有 n 顆球則能獲得獎金 $2n+1$ 元，但沒有球則無法獲得任何獎金，試問六人總獎金的期望值。

4. 設 $f_1(x)=\dfrac{2x-7}{x+1}$，n 是一個正整數且 $f_{n+1}(x)=f_1\left(f_n(x)\right)$，若 $f_{13}(t)$、$f_{23}(t)$、$f_{36}(t)$ 是等差數列，求 $\log\left(f_1(t)\times f_2(t)\times f_3(t)\times\cdots\times f_{114}(t)\times f_{115}(t)\right)$ 的最接近整數。

5. 點 $P(x,y)$ 對拋物線 $\Gamma: y=x^2$ 作兩切線，此兩切線與拋物線相切於點 Q 與 R，已知 $\tan\angle QPR=4$ 時，點 P 的軌跡會落在方程 $x^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 上，求 $\left(B,C,D,E,F\right)$。

6. 若$x^2+y^2=4$，求$\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{6y}{x}$的最小值。

7. 計算$\displaystyle\sum_{k=1}^{2025}k^2C_k^{2025}$除以$1000$的餘數。

8. 將空間中的一直線$L:\begin{cases}x=z\\y=0\end{cases}$繞$z$軸轉一圈形成圓錐面$\Gamma$。
若在圓錐面Γ與平面$E:3x+\sqrt{5}y+6z=66$所圍成的區域內放置一顆球，求此球最大半徑。

9. 空間直角坐標系中，試求區域$\begin{cases}0\le z\le 10-2x^2\\z\le 10-5y^2\end{cases}$的體積。

10. 滿足$\begin{cases}ab=cd\\a+b+c+d=203\end{cases}$的正整數解序組$(a,b,c,d)$共有幾組？

二、計算證明題（每題 10 分，4 題，共 40 分）

1. 設 $f(x)=(a-1)(\log_5 x)^2-8a(\log_5 x)+3a+1$。試求最大的區間 I，使得當 $0\le a\le 1$ 且 $x\in I$ 時，$f(x)$ 恆為正數。

2. 證明實係數多項方程 $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_3x^3+x^2+x+1=0$ 至少含有兩個虛根。

3. 求無窮級數和 $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n-1}+\cdots$。

4. 如圖，給定平面上 $\overline{BC}$ 與其上三等分點 D、E，而 A 為平面上不在直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的動點。令 $\alpha=\angle BAD,\ \beta=\angle DAE,\ \gamma=\angle \cancel{BAD}$ EAC，證明：$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma}{\tan\alpha\tan\gamma}$ 為 β 的函數，並求出此函數。