准考證號碼

臺中市立文華高級中等學校 114 學年度第 1 次教師甄選

數學科專業知能 答案卷

※ 注意事項
1. 請核對**左方**准考證號碼是否正確。
2. 作答時不得填寫姓名或有任何影響考試公平的記號，否則不予計分。

初 評	複 評

注意：請勿用答案卷正反面打草稿，草稿請寫在計算草稿紙上

一、填充題：請將正確答案填入正確的題格中，分式須化至最簡，根式須有理化，否則不予計分，全對才給分，不需計算過程。

第一部份：**(每格 4 分)**

1	**2**	**3**
$\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$	$\left(\frac{12}{5},4\right)$	$-22x+69$
4	**5**	**6**
5	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{4}$
7	**8**	
$10x+9y=-14$	$42-4\sqrt{10}$	

第二部份：**(每格 6 分)**

9	**10**	**11**
-6	-4	$\frac{46\sqrt{2}}{3}$
12	**13**	**14**
66	$m<4+\sqrt{15}$	$\frac{1}{3}$
15	**16**	
$\frac{41}{88}$	$5-2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$	

彌封區

二、計算證明題：共 **20** 分。

(請自行標清楚題號再作答，須詳列計算過程或說明理由，否則不予計分)

↲從此寫起，並於框線內作答

1. 由假設可知上半圓方程式為 $y=b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ ，

而橢圓為該曲線在 $[-a,a]$ 間與 x 面積之兩倍，即 $2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx$ 。

令 $x=a\sin\theta$ ，$\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 則

(1)

$b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=b\sqrt{1-\sin^2\theta}=b\sqrt{\cos^2\theta}=b\cos\theta$

(2) $dx=a\cos\theta d\theta$

(3) $x=a\Rightarrow\sin\theta=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2};\ x=-a\Rightarrow\sin\theta=-1\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{2}$ 因此

$$2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ab\cos^2\theta d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ab\left(1+\cos 2\theta\right)d\theta=ab\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab$$

彌封區

2.

[方法一]

$\because [x^2]-[x]^2 \in \mathbb{Z}\ \therefore \frac{17}{4}-x \in \mathbb{Z}$，可假設$x=n+\frac{1}{4},\ n\in\mathbb{Z}$，則$[x]=n$

$\Rightarrow [x^2]=n^2+4-n$

又$n^2 \le [x^2] < (n+1)^2$

可得$n^2 \le n^2+4-n$且$n^2+4-n < n^2+2n+1$

$\Rightarrow \frac{5}{3} < n \le 4$

分情形討論：

(1)$n=2$

$x=2+\frac{1}{4},\ x^2=4+1+\frac{1}{16},\ [x]=2,\ [x^2]=5$

代入原式：$5-4=1\neq 2=\frac{17}{4}-\left(2+\frac{1}{4}\right)$ 不合

(2)$n=3$

$x=3+\frac{1}{4},\ x^2=9+\frac{3}{2}+\frac{1}{16},\ [x]=3,\ [x^2]=10$

代入原式：$10-9=1=1=\frac{17}{4}-\left(3+\frac{1}{4}\right)$ 合

(3)$n=4$

$x=4+\frac{1}{4},\ x^2=16+2+\frac{1}{16},\ [x]=4,\ [x^2]=18$

代入原式：$18-16=2\neq 0=\frac{17}{4}-\left(4+\frac{1}{4}\right)$ 不合

由(1)(2)(3)知$x=3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}=3.25$。

[方法二]

$\because [x^2]-[x]^2 \in \mathbb{Z}\ \therefore \frac{17}{4}-x \in \mathbb{Z}$，可假設$x=n+\frac{1}{4},\ n\in\mathbb{Z}$

則$[x]=n$，$x^2=n^2+\frac{n}{2}+\frac{1}{16}$

(1)n為偶數：可假設$n=2k,\ k\in\mathbb{Z}$

則$[x]=2k,\ [x^2]=4k^2+k$

$\Rightarrow 4k^2+k-4k^2=4-2k \Rightarrow k=\frac{4}{3}$ 不合

(2)n為奇數：可假設$n=2k+1,\ k\in\mathbb{Z}$

則$[x]=2k+1,\ [x^2]=4k^2+4k+1+k$

$\Rightarrow (4k^2+5k+1)-(4k^2+4k+1)=4-(2k+1) \Rightarrow k=1$ 合

由(1)(2)知$x=3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}=3.25$。

彌封區

3. 由正弦定理$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2$，代入$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=8$，

得$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2\Rightarrow\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}=2\Rightarrow\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1$，

由和差化積，得$2\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos 2C=-1\Rightarrow 2\cos(\pi-C)\cos(A-B)+\left(2\cos^2 C-1\right)=-1$

$\Rightarrow -2\cos C\cos(A-B)+2\cos^2 C=0\Rightarrow 2\cos C\left(-\cos(A-B)+\cos C\right)=0\Rightarrow\cos C=0$或$\cos C=\cos(A-B)$。

情況(1)： 若$\cos C=0$，則$C=\frac{\pi}{2}$。

情況(2)： 若$\cos C=\cos(A-B)$，則$C=A-B$或$C=B-A\Rightarrow A=\frac{\pi}{2}$或$B=\frac{\pi}{2}$。

由(1)(2)，得ΔABC為直角三角形。

彌封區