臺中市立文華高級中等學校 114 學年度第 1 次教師甄選
數學科專業知能試題本

測驗說明：

一、本測驗分成二大題：填充題(80 分)及計算題(20 分)。

二、填充題作答說明：請將正確答案填入正確的題格中，分式須化至最簡，根式須有理化，否則不予計分，全對才給分，不需計算過程。

三、計算題作答說明：請自行標清楚題號再作答，須詳列計算過程或說明理由。

四、另附一張 A3 計算紙，可供計算或打草稿，請勿用答案卷正反面打草稿。計算紙上方請書寫准考證號碼，並於考試完畢隨試題收回。

一、填充題：(共 80 分)

Ⅰ.填充一(每格 4 分，共 32 分，每格全對才給分。)

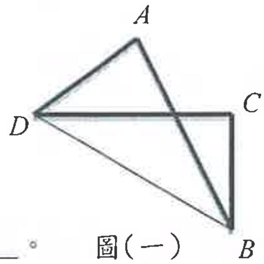
1. 已知 a 為正無理數，a^3-4a^2-6a+4 與 a^2-3a+1 皆為有理數，則 $a=$______ 。

2. 有一圓內接四邊形 $ABCD$，$\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CD}=3$，$\overline{AD}=9$，若 $\overrightarrow{CA}=x\overrightarrow{CB}+y\overrightarrow{CD}$，

則數對 $(x,y)=$__________。

3. 已知四次整係數多項式 $f(x)$ 滿足首項係數為 1 且 $f(2-\sqrt{3})=f(1+\sqrt{5})=7$，則 $f(x)$ 除以 x^2-6 的餘式為__________。

4. 求 $5^{(\log 2)^3}\times 8^{(\log 5)^2}\times 5^{(\log 5)^3}=$__________。



5. 有一長方形 $ABCD$，$\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=5$，如圖(一)，將長方形沿對角線 $\overline{BD}$ 折起，使得 ΔABD 與 ΔBCD 夾 $60°$，則 $\cos(\angle ADC)=$________。

圖(一)

臺中市立文華高級中等學校
教師甄選
用

6. 已知有一袋子裝有「兩顆紅球、三顆黑球、四顆白球」，今從袋中取球並記錄顏色。假設每顆球被取到的機會相同，且每次只取一球，取後不放回，直到紅球全數取出為止，則在紅球沒有被連續取出的條件下，紅球是三種顏色中最後被取完的機率為________。

7. 雙曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$ 有一弦以 $(-5,4)$ 為中點，則此弦的方程式為________________。

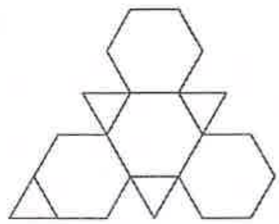
8. 已知複數 z 滿足 $|z|=1$，則 $|z-6|^2+|z+2i|^2$ 之最小值為__________。

Ⅱ.填充二(每格 6 分，共 48 分，每格全對才給分)

9. 設實係數多項式函數 $f(x)=x^4+ax^2+bx$ 與 $g(x)=cx+(a-3)$ 的圖形相切於兩相異點，則實數 $a=$________。

10. 已知方程式 $3^{(x^2+4x+7)}=81\times\log_3(x^2+4x+7)$ 恰有兩實根 α、β，則 $\alpha+\beta$ 之值為______。

11. 有一「八面體」，其展開圖如圖(二)，由四個正三角形及四個正六邊形組成。已知各邊邊長為 2 單位長，則此八面體的體積為________。



圖(二)

12. 設 $f(x)=3x^{20}+192x^8+3$，$g(x)=x^3-3x^2+4x-2$，$f(x)=0$ 的二十個複數根為 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{20}$，則 $g(\alpha_1)\times g(\alpha_2)\times\cdots\times g(\alpha_{20})=$_________。

13. 若 $a<b$，已知對任意實數 x，$ax^2+bx+c\geq 0$ 恆成立，且 $m<\dfrac{4a+3b+2c}{b-a}$ 恆成立，則實數 m 之範圍為___________。

臺中市立文華高級中學學校
教師甄選
專用

14. 已知數列$\lt a_n \gt$滿足前n項和$S_n=n^2+4n+3$。以符號μ_n表示前n項的算數平均數、σ_n表示前n項的標準差，試求：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{{\sigma_n}^2}{{\mu_n}^2}$之值__________。

15. 設等差數列$\langle a_n\rangle$的前n項和為T_n，等差數列$\langle b_n\rangle$的前n項和為S_n。

對任意正整數n，$\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}T_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}S_k}=\dfrac{2n+3}{3n+4}$恆成立，則$\dfrac{a_7}{b_{10}}=$_______。

16. 在邊長為r的正方形$ABCD$之內部任取一點P,則$\left(\overline{PA}-r\right)\left(\overline{PB}-r\right)\left(\overline{PC}-r\right)\left(\overline{PD}-r\right)\ge 0$的機率為________。

二、計算題：(共 20 分，配分列於每小題之後，須詳列計算過程或說明理由。)

1. 試證：橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的面積為$\pi ab$，其中$a>0$，$b>0$。(6 分)

2. 已知實數x滿足$[x^2]-[x]^2=\dfrac{17}{4}-x$，其中$[x]$表示不大於$x$的最大整數，試求：$x$的所有解。(7 分)

3. 單位圓上有三點A、B、C，$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=8$，證明：$\Delta ABC$為直角三角形。(7 分)

臺中市立文華高級中學學校 教師甄選 專用